



*Российская Академия Наук*

# **А Т АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА**

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

# 2

ФЕВРАЛЬ

Москва

2025

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),  
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

**Главный редактор:**

Галяев А.А.

**Заместители главного редактора:**

Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

**Ответственный секретарь:**

Самохин А.С.

**Редакционный совет:**

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кузнецов О.П., Кулешов А.П.,  
Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,  
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

**Редакционная коллегия:**

Алескеров Ф.Т., Арутюнов А.В., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В.,  
Вишневский В.М., Воронцов К.В., Граничин О.Н., Жилиякова Н.Ю.,  
Каравай М.Ф., Кибзун А.И., Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В.,  
Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И.,  
Меерков С.М. (США), Мещеряков Р.В., Миллер Б.М., Михальский А.И.,  
Моржин О.В., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),  
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,  
Поляков А.Е. (Франция), Протасов В.Ю., Рапопорт Л.Б., Родионов И.В.,  
Сельвесюк Н.И., Соболевский А.Н., Степанов О.А., Филимонюк Л.Ю.,  
Фрадков А.Л., Хоров Е.М., Цыбаков А.Б. (Франция), Чеботарев П.Ю.,  
Чхартишвили А.Г., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»

© 2025 г. М.М. КОГАН, д-р физ.-мат. наук (mkogan@nngasu.ru)  
(Научно-технологический университет “Сириус”, Сочи),  
А.В. СТЕПАНОВ (andrey8st@yahoo.com)  
(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

## ОПТИМАЛЬНАЯ АБСОЛЮТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ СИСТЕМ ЛУРЬЕ НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ И АПРИОРНЫХ ДАННЫХ<sup>1</sup>

Для систем Лурье, состоящих из неизвестной линейной подсистемы и неизвестных нелинейных функций, лежащих в заданных секторах, разработан метод построения оптимального абсолютно стабилизирующего управления на основе экспериментальных и априорных данных. В основе метода лежит минимаксный подход, при котором максимизация интегрального квадратичного функционала осуществляется на пересечении двух матричных эллипсоидальных множеств, выделяемых по экспериментальным и априорным данным. Результаты математического моделирования нелинейного осциллятора показывают преимущество получаемого закона управления над классическим робастным управлением, синтезируемым на основе априорной информации.

*Ключевые слова:* системы Лурье, неопределенность, робастное управление, экспериментальные данные, линейные матричные неравенства.

**DOI:** 10.31857/S0005231025020014, **EDN:** IRNEBG

### 1. Введение

В данной статье для построения законов управления нелинейными системами Лурье [1], состоящими из неизвестных линейных подсистем и неизвестных нелинейных функций, принадлежащих заданным секторам, применяются методы построения законов управления неизвестными линейными динамическими объектами, разработанные в [2–4]. Отсутствие математической модели управляемого объекта здесь восполняется данными измерений траектории системы на конечном интервале времени и некоторой априорной информацией. При этом не решается задача идентификации объекта, а достижение цели управления происходит даже в условиях неидентифицируемости. В основу этих методов положен минимаксный подход к построению робастного управления, при котором находится гарантируемое значение целевого функционала для любого объекта из некоторого множества неопределенности. В отличие

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-11-20023).

от классического робастного управления (см., например, обзор [5]), в котором это множество выбирается только по априорной информации, здесь множество неопределенности выделяется как на основе данных, полученных в эксперименте, так и на основе априорной информации. Это позволяет получить закон управления, обеспечивающий, как будет видно из дальнейшего, значительно меньшее гарантированное значение целевого функционала.

Использованию экспериментальной информации для непосредственного построения законов управления в последнее время уделяется большое внимание (см., например, [6–8] и библиографию, приведенную в [2–4]). В основном эти работы касаются построения законов управления линейными системами. К настоящему времени авторам известна только статья [9], посвященная синтезу управления на основе экспериментальных данных для систем с нелинейной вектор-функцией, удовлетворяющей квадратичному неравенству. В [9] предполагается, что во время эксперимента отсутствуют возмущения и что управление обеспечивает выполнение так называемого условия исключающего возбуждения, необходимого для идентифицируемости неизвестных параметров. Кроме того, размерность переменных в линейных матричных неравенствах для вычисления параметров регулятора растет с увеличением числа измерений, что усложняет реализацию закона управления. В отличие от этого рассматриваемый ниже подход охватывает системы с несколькими нелинейными секторными функциями, во время эксперимента присутствуют возмущения, не требуется идентифицируемость системы, размерности переменных определяются только размерностями векторов состояния и управления и не зависят от числа измерений.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим неопределенную управляемую нелинейную систему Лурье, состоящую из линейной системы

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \partial x(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Fv(t), \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned}$$

замкнутой нелинейной непрерывной вектор-функцией

$$(2.2) \quad v(t) = \varphi(y(t), t), \quad y(t) = L^T x(t),$$

где  $\partial$  – оператор дифференцирования в непрерывном случае или оператор сдвига на единицу вперед в дискретном случае,  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  – состояние,  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  – выход,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  – управление,  $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$  – целевой выход,  $\varphi(y, t) \in \mathbb{R}^{n_v}$  – неизвестная нелинейная вектор-функция,  $\varphi(0, t) \equiv 0$ . Каждая компонента  $\varphi_i(y_i, t)$  функции (2.2) при всех  $t \geq 0$  расположена в соответствующем конечном секторе  $[\alpha_i, \beta_i]$ , т.е.

$$(2.3) \quad \alpha_i \leq \frac{\varphi_i(y_i, t)}{y_i} \leq \beta_i, \quad i = 1, \dots, n_y.$$

Предполагается, что матрицы системы  $A$ ,  $B$  и  $F$  неизвестны и начальное состояние  $x(0) = x_0$  не определено. Постановка задачи далее будет уточнена, но в общем плане требуется на основе априорной информации и данных, полученных из экспериментов, синтезировать линейные обратные связи по состоянию  $u(t) = \Theta x(t)$ , при которых замкнутая система будет абсолютно устойчивой, т.е. состояние равновесия  $x = 0$  системы (2.1), (2.2) асимптотически устойчиво для всех функций  $\varphi(y, t)$  из указанного класса, и при этом гарантируется следующая оценка переходного процесса при произвольных начальных условиях:

$$(2.4) \quad \sup_{x_0 \neq 0} \frac{\|z\|^2}{x_0^T R^{-1} x_0} < \gamma^2,$$

где  $R = R^T > 0$  – весовая матрица,  $\|\xi\|^2 = \sum_{t=0}^{\infty} |\xi(t)|^2$  в дискретном случае и  $\|\xi\|^2 = \int_{t=0}^{\infty} |\xi(t)|^2 dt$  в непрерывном случае.

### 3. Экспериментальные и априорные данные

Информация о неизвестных параметрах системы (2.1) извлекается из конечного набора измерений ее траектории. Допустим, что во время эксперимента на систему действует возмущение  $w(t)$  так, что уравнения системы имеют вид

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \partial x(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Fv(t) + B_w w(t), \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned}$$

Предполагается также, что в эксперименте, предшествующем синтезу управления, имеется возможность измерять значения нелинейной функции в системе, принадлежащей заданным секторам. Предположим, что в случае дискретной системы получены измерения состояния  $x_0, x_1, \dots, x_N$  и нелинейной функции  $\varphi(y_0, 0), \dots, \varphi(y_{N-1}, N-1)$  при выбранных управлениях  $u_0, \dots, u_{N-1}$  и некотором неизвестном возмущении  $w_0, \dots, w_{N-1}$ . Составим матрицы

$$\begin{aligned} X &= (x_0 \cdots x_{N-1}), \quad X_+ = (x_1 \cdots x_N), \quad U = (u_0 \cdots u_{N-1}), \\ \Phi &= (\varphi(y_0, 0) \cdots \varphi(y_{N-1}, N-1)), \quad W = (w_0 \cdots w_{N-1}). \end{aligned}$$

В случае непрерывной системы допустим, что имеются измерения в моменты времени  $t_0, \dots, t_{N-1}$  состояния  $x(t_0), \dots, x(t_{N-1})$ , производных состояния  $\dot{x}(t_0), \dots, \dot{x}(t_{N-1})$  и нелинейной функции  $\varphi(y(t_0), t_0), \dots, \varphi(y(t_{N-1}), t_{N-1})$  при выбранных управлениях  $u(t_0), \dots, u(t_{N-1})$  и некоторых неизвестных возмущениях  $w(t_0), \dots, w(t_{N-1})$ . Составим матрицы

$$\begin{aligned} X &= (x(t_0) \cdots x(t_{N-1})), \quad X_+ = (\dot{x}(t_0) \cdots \dot{x}(t_{N-1})), \quad U = (u(t_0) \cdots u(t_{N-1})), \\ \Phi &= (\varphi(y(t_0), t_0) \cdots \varphi(y(t_{N-1}), t_{N-1})), \quad W = (w(t_0) \cdots w(t_{N-1})). \end{aligned}$$

Для матриц с экспериментальными данными в непрерывном и дискретном случаях имеют место соотношения

$$(3.2) \quad X_+ = A_{real}X + B_{real}U + F_{real}\Phi + B_wW,$$

в которых  $A_{real}$ ,  $B_{real}$  и  $F_{real}$  – реальные неизвестные матрицы уравнений системы. Обозначим:

$$\Delta_{real} = (A_{real} \ B_{real} \ F_{real}), \quad \widehat{X} = \text{col}(X, U, \Phi)$$

и запишем уравнения (3.2) в виде линейной матричной регрессии

$$(3.3) \quad X_+ = \Delta_{real}\widehat{X} + \widehat{W}, \quad \widehat{W} = B_wW.$$

Допустим, что возмущения, включающие в том числе ошибки приближенного вычисления производных, удовлетворяют условию

$$(3.4) \quad \widehat{W}\widehat{W}^T \leq \Omega.$$

В частности, если ошибки при всех  $t$  удовлетворяют ограничению  $\|w(t)\|_\infty \leq d_w$  для некоторого заданного  $d_w$ , которое будем называть уровнем ошибки, то  $\Omega = d_w^2 n_w N B_w B_w^T$ . В случае, когда суммарная “энергия” возмущений во время эксперимента ограничена  $\sum_{i=0}^{N-1} |w(t_i)|^2 \leq \nu^2$ , то  $\Omega = \nu^2 B_w B_w^T$ .

Определим множество  $\Delta_{\mathbf{p}}$  матриц  $\Delta$  порядка  $n_x \times (n_x + n_u + n_y)$ , которые могли бы генерировать полученные в эксперименте матрицы  $\Phi$ ,  $\Phi_+$  и  $Z$  при выбранных управлениях  $U$  и некоторых допустимых ошибках  $\widehat{W}$ , удовлетворяющих ограничению (3.4). Для этих матриц равенство (3.3) должно выполняться при некоторой  $\widehat{W}$ , удовлетворяющей (3.4). Следовательно,

$$\Delta_{\mathbf{p}} = \left\{ \Delta : X_+ = \Delta\widehat{X} + \widehat{W}, \quad \widehat{W}\widehat{W}^T \leq \Omega \right\}$$

и  $\Delta \in \Delta_{\mathbf{p}}$  тогда и только тогда, когда

$$(3.5) \quad (X_+ - \Delta\widehat{X})(X_+ - \Delta\widehat{X})^T \leq \Omega.$$

Очевидно, что  $\Delta_{real} \in \Delta_{\mathbf{p}}$ . Для дальнейшего применения представим последнее неравенство в виде

$$(3.6) \quad (\Delta \ I) \Psi^{(1)} (\Delta \ I)^T \leq 0,$$

где симметрическая матрица  $\Psi^{(1)}$  порядка  $2n_x + n_u + n_y$  разбивается на блоки  $\Psi_{ij}^{(1)}$ ,  $i, j = 1, 2$  соответствующего порядка и вычисляется следующим образом:

$$(3.7) \quad \Psi^{(1)} = \begin{pmatrix} \widehat{X}\widehat{X}^T & | & \star \\ \hline -X_+\widehat{X}^T & | & X_+X_+^T - \Omega \end{pmatrix}.$$

Таким образом, множество матриц  $\Delta$ , согласованных с полученными экспериментальными данными, удовлетворяет неравенству (3.6).

Покажем, что множество  $\Delta_{\mathbf{p}}$  является, вообще говоря, неограниченным, и выясним, при каких условиях оно будет ограниченным. Для этого обозначим через  $\text{Im}(\cdot)$ ,  $\text{Ker}(\cdot)$ ,  $\text{span}(\cdot)$  и  $\text{rank}(\cdot)$  образ, ядро, линейное подпространство столбцов и столбцовый ранг соответствующей матрицы. Допустим, что  $\text{rank } \hat{X} = s \leq \min\{n_x + n_u + n_y, N\}$  и представим матрицу  $\hat{X}$  в виде сингулярного разложения [10]

$$(3.8) \quad \hat{X} = (M_1 \ M_2) \begin{pmatrix} \Sigma & 0_{s \times (N-s)} \\ 0_{(n_x+n_u+n_y) \times s} & 0_{(n_x+n_u+n_y) \times (N-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1^T \\ G_2^T \end{pmatrix} = M_1 \Sigma G_1^T,$$

$$M_1 \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u+n_y) \times s}, \quad M_2 \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u+n_y) \times (n_x+n_u+n_y-s)}, \quad M = (M_1 \ M_2),$$

где  $\Sigma = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s) > 0$ ,  $\lambda_i$  – собственные числа информационной матрицы  $\hat{X} \hat{X}^T$ ,  $\text{span } M_1 = \text{Im } \hat{X}$ ,  $\text{span } M_2 = \text{Ker } \hat{X}^T$ ,  $\text{span } G_1 = \text{Im } \hat{X}^T$ ,  $\text{span } G_2 = \text{Ker } \hat{X}$ ,  $M^T M = I$ . Выберем ортонормированный базис, состоящий из столбцов матрицы  $M$ , введем соответствующие переменные

$$\hat{\Delta} = \Delta (M_1 \ M_2) = \left( \hat{\Delta}^{(1)} \ \hat{\Delta}^{(2)} \right), \quad \hat{\Delta}^{(1)} \in \mathbb{R}^{n_x \times s}, \quad \hat{\Delta}^{(2)} \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x+n_u+n_y-s)}$$

и обозначим  $\hat{X}^{(1)} = M_1^T \hat{X} = \Sigma G_1^T$ . Тогда линейная матричная регрессия (3.3) в новых переменных запишется как

$$(3.9) \quad X_+ = \hat{\Delta}_{real}^{(1)} \hat{X}^{(1)} + \hat{W},$$

где  $(s \times N)$ -матрица  $\hat{X}^{(1)}$  имеет полный строчный ранг, а  $\hat{\Delta}_{real}^{(1)}$  – “проекция” матрицы  $\hat{\Delta}_{real}$  на подпространство  $\text{Im } \hat{X}$ , т.е. строки матрицы  $\hat{\Delta}_{real}^{(1)}$  являются проекциями строк матрицы  $\hat{\Delta}_{real}$  на подпространство  $\text{Im } \hat{X}$ .

*Лемма 3.1. Множество  $\Delta_{\mathbf{p}}$  матриц, согласованных с экспериментальными данными  $\hat{X} = \text{col}(X, U, \Phi)$ , для которых верно (3.8), представляет собой неограниченный вырожденный “матричный эллипсоид”, определяемый как*

$$(3.10) \quad (\hat{\Delta}^{(1)} - \hat{\Delta}_{LS}^{(1)}) \Sigma^2 (\hat{\Delta}^{(1)} - \hat{\Delta}_{LS}^{(1)})^T \leq \Gamma, \quad \hat{\Delta}^{(2)} \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x+n_u+n_y-s)},$$

где

$$(3.11) \quad \Gamma = \Omega + X_+ [\hat{X}^{(1)T} \Sigma^{-2} \hat{X}^{(1)} - I] X_+^T \geq 0,$$

$\hat{\Delta}_{LS}^{(1)} = X_+ \hat{X}^{(1)T} \Sigma^{-2}$  – оценка методом наименьших квадратов матрицы  $\hat{\Delta}_{real}^{(1)}$  в (3.9).

Следствие 3.1. Множество  $\Delta_{\mathbf{p}}$  ограничено тогда и только тогда, когда выполнено ранговое условие

$$(3.12) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} X \\ U \\ \Phi \end{pmatrix} = n_x + n_u + n_y.$$

В этом случае множество  $\Delta_{\mathbf{p}}$  состоит из матриц, определяемых неравенством (3.10), в котором  $\widehat{\Delta}^{(1)} = \widehat{\Delta}$  и  $\widehat{\Delta}_{LS}^{(1)} = \widehat{\Delta}_{LS}$ .

Доказательство леммы приведено в Приложении. Из этой леммы следует, что по полученным данным в общем случае можно идентифицировать только  $\widehat{\Delta}_{real}^{(1)}$  – “проекцию” неизвестной матрицы на подпространство  $\text{Im } \widehat{X}$ . При выполнении рангового условия (3.12) матрица  $\Delta_{real}$  в (3.3) идентифицируема, а “матричный эллипсоид” и соответственно множество  $\Delta_{\mathbf{p}}$  ограничены. Отметим, что для выполнения рангового условия (3.12) необходимо, чтобы количество измерений было не меньше, чем сумма размерностей векторов состояния, выхода и управления, т.е.  $N \geq n_x + n_u + n_y$ . В рассматриваемом здесь синтезе робастного управления не требуется выполнения рангового условия и количество экспериментов может быть меньше, чем  $n_x + n_u + n_y$ .

Далее, пусть имеется дополнительная информация о том, что неизвестная матрица  $\Delta_{real}$  удовлетворяет ограничению

$$(3.13) \quad (\Delta - \Delta_*)(\Delta - \Delta_*)^T \leq \rho^2 I, \quad \Delta_* = (A_* B_* F_*),$$

в котором  $\Delta_*$  содержит соответствующие матрицы номинального объекта, а  $\rho$  – параметр, характеризующий размер области неопределенности. Запишем это неравенство в виде

$$(3.14) \quad (\Delta \quad I) \Psi^{(2)} (\Delta \quad I)^T \leq 0,$$

где матрица  $\Psi^{(2)}$  состоит из блоков  $\Psi_{ij}^{(2)}$ ,  $i, j = 1, 2$  и имеет вид

$$(3.15) \quad \Psi^{(2)} = \begin{pmatrix} I & | & * \\ \hline -\Delta_* & | & \Delta_* \Delta_*^T - \rho^2 I \end{pmatrix}.$$

Обозначим:  $\Delta_{\mathbf{a}}$  – множество матриц, которые удовлетворяют неравенству (3.14), и  $\Delta_{\text{set}} = \Delta_{\mathbf{p}} \cap \Delta_{\mathbf{a}}$  – множество матриц, которые удовлетворяют неравенствам (3.6) и (3.14). Очевидно, что  $\Delta_{real} \in \Delta_{\text{set}}$ . На рис. 1 для иллюстрации схематично изображен один из возможных вариантов расположения множеств  $\Delta_{\mathbf{p}}$ ,  $\Delta_{\mathbf{a}}$  и их пересечения  $\Delta_{\text{set}}$ .

С учетом введенных обозначений задача оптимальной абсолютной стабилизации неизвестной системы Лурье (2.1) может быть сформулирована так: не строя математическую модель, синтезировать закон управления  $u = \Theta x$ , при котором для всех систем, матрицы которых согласованы с априорными

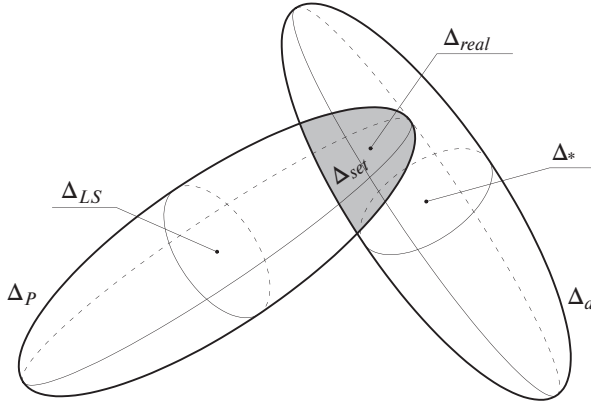


Рис. 1. Множество  $\Delta_{\text{set}}$  неизвестных параметров  $\Delta$ , согласованных с экспериментальными и априорными данными.

и экспериментальными данными и нелинейные функции принадлежат заданным секторам (2.3), замкнутая система будет абсолютно устойчивой и функционал  $J(\Theta)$  ограничен заданной константой, т.е.

$$(3.16) \quad J(\Theta) = \sup_{\Delta \in \Delta_{\text{set}}} \sup_{\varphi(y,t)} \sup_{x_0 \neq 0} \frac{\|z\|^2}{x_0^T R^{-1} x_0} < \gamma^2.$$

#### 4. Предварительные преобразования и вспомогательные утверждения

Рассмотрим класс систем Лурье, в которых компоненты вектор-функции  $\varphi(y, t)$  удовлетворяют условию (2.3). Прежде, чем перейти к решению поставленной задачи, сделаем некоторые преобразования, упрощающие дальнейшее изложение. Введем вектор-функцию  $\widehat{\varphi}(y, t)$  с компонентами

$$(4.1) \quad \widehat{\varphi}_i(y_i, t) = \frac{1}{\beta_i - \alpha_i} [\varphi_i(y_i, t) - \alpha_i y_i], \quad i = 1, \dots, n_y.$$

Тогда уравнения (2.1) и (2.2) примут вид

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + F\Lambda_1 L^T)x(t) + Bu(t) + F\Lambda_2 \widehat{v}(t), \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned}$$

где  $\Lambda_1 = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_y})$ ,  $\Lambda_2 = \text{diag}(\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_{n_y} - \alpha_{n_y})$ , и

$$(4.3) \quad \widehat{v} = \widehat{\varphi}(y, t), \quad y = L^T x,$$

а функции  $\widehat{\varphi}_i(y_i, t)$  удовлетворяют ограничениям (2.3) при  $\alpha_i = 0$ ,  $\beta_i = 1$ ,  $i = 1, \dots, n_y$ , т.е. принадлежат сектору  $[0, 1]$ .

Покажем, что функция Ляпунова, обеспечивающая абсолютную устойчивость системы Лурье с гарантированной оценкой квадратичного функционала, может быть найдена при решении соответствующей задачи о наилучшем

возмущении в линейной системе (см. [11]). А именно, для заданной системы Лурье

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathcal{A}x(t) + \mathcal{F}v(t), \\ z(t) &= Cx(t), \end{aligned}$$

$$(4.5) \quad v(t) = \varphi(y(t), t), \quad y(t) = L^T x(t),$$

с устойчивой матрицей  $\mathcal{A}$  и принадлежащими сектору  $[0, 1]$  компонентами вектор-функции  $\varphi(y, t)$  имеет место следующее утверждение.

*Лемма 4.1.* Пусть для функции  $V(x) = x^T Y x$  с  $0 < Y = Y^T < \gamma^2 R^{-1}$  по траектории линейной дискретной или непрерывной системы (4.4) для всех  $x, v$  ( $|x|^2 + |v|^2 \neq 0$ ) выполняется соответствующее неравенство

$$(4.6) \quad \Delta V + |z|^2 - v^T \Gamma^{-1}(v - L^T x) < 0, \quad \dot{V} + |z|^2 - v^T \Gamma^{-1}(v - L^T x) < 0,$$

где  $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_{n_y}) > 0$ . Тогда функция  $V(x)$  обеспечивает абсолютную устойчивость системы Лурье (4.4), (4.5) и при этом  $\|z\|^2 < \gamma^2 x_0^T R^{-1} x_0$ .

*Замечание 1.* Заменяя переменные  $\hat{v} = \Gamma^{-1/2}(v - \frac{1}{2}L^T x)$  и выбирая целевой выход  $\hat{z} = \text{col}(C, \frac{1}{2}\Gamma^{-1/2}L^T)x$ , получим, что уравнения (4.4) переходят в уравнения

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left( \mathcal{A} + \frac{1}{2}\mathcal{F}L^T \right) x(t) + \mathcal{F}\Gamma^{1/2}\hat{v}(t), \\ \hat{z}(t) &= \begin{pmatrix} C \\ \frac{1}{2}\Gamma^{-1/2}L^T \end{pmatrix} x(t), \end{aligned}$$

в которых  $\mathcal{A} + \frac{1}{2}\mathcal{F}L^T$  – гурвицева матрица, а неравенство (4.6) превратится в  $\dot{V} + |\hat{z}|^2 - |\hat{v}|^2 < 0$ . Последнее неравенство с учетом того, что  $Y < \gamma^2 R^{-1}$ , эквивалентно условию

$$\sup_{x_0, \hat{v}} \frac{\|\hat{z}\|^2}{x_0^T \gamma^2 R^{-1} x_0 + \|\hat{v}\|^2} < 1,$$

означающему, что обобщенная  $H_\infty$ -норма с весовой матрицей  $\gamma^{-2}R$  системы (4.7) от входа  $\hat{v}$  к выходу  $\hat{z}$  меньше 1. Нетрудно видеть, что в случае одной нелинейности при  $z \equiv 0$  полученное частотное условие  $\|H\|_\infty < 1$  эквивалентно круговому критерию абсолютной устойчивости [12].

Следующее вспомогательное утверждение позволяет характеризовать обобщенную  $H_\infty$ -норму линейной устойчивой системы

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}v(t), \\ z(t) &= \mathcal{C}x(t) \end{aligned}$$

в терминах двойственной системы.

Лемма 4.2 [3]. Обобщенная  $H_\infty$ -норма с весовой матрицей  $\mathcal{R} > 0$  системы (4.8) меньше 1 тогда и только тогда, когда существует положительно определенная квадратичная форма  $V_d(x_d) = x_d^T P x_d$  с  $P > \mathcal{R}$ , для которой по траектории двойственной системы

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \dot{x}_d(t) &= \mathcal{A}^T x_d(t) + \mathcal{C}^T v_d(t), \\ z_d(t) &= \mathcal{B}^T x_d(t) \end{aligned}$$

при всех  $x_d, v_d$  ( $|x_d|^2 + |v_d|^2 \neq 0$ ) выполняется соответствующее неравенство

$$(4.10) \quad \Delta V_d + |z_d|^2 - |v_d|^2 < 0, \quad \dot{V}_d + |z_d|^2 - |v_d|^2 < 0.$$

Замечание 2. Матрицы квадратичных форм  $V(x) = x^T Y x$  и  $V_d(x_d) = x_d^T P x_d$  прямой и двойственной систем связаны соотношением  $P = Y^{-1}$ .

Резюмируя приведенные выше вспомогательные утверждения и замечания, приходим к следующему результату.

Теорема 4.1. Система Лурье (2.1)–(2.3) с заданными матрицами  $A, B$  и  $F$ , замкнутая обратной связью  $u = \Theta x$ , абсолютно устойчива и функционал (2.4) ограничен заданной константой  $\gamma^2$ , если обобщенная  $H_\infty$ -норма с весовой матрицей  $\gamma^{-2}R$  от входа  $v$  к выходу  $z$  линейной системы

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + B\Theta + F\Lambda L^T)x(t) + F\Lambda_2\Gamma^{1/2}v(t), \\ z(t) &= \begin{pmatrix} C + D\Theta \\ \frac{1}{2}\Gamma^{-1/2}L^T \end{pmatrix} x(t), \end{aligned}$$

где  $\Lambda = \Lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda_2$ , меньше 1.

Следствие 4.1. С учетом леммы 4.2 можно утверждать, что замкнутая система Лурье (2.1)–(2.3) будет абсолютно устойчивой и выполняется ограничение (2.4), если существует функция  $V(x_d) = x_d^T P x_d$  с  $P = P^T > \gamma^{-2}R$ , для которой по траектории линейной системы

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \dot{x}_d(t) &= (A + B\Theta + F\Lambda L^T)^T x_d(t) + \begin{pmatrix} C + D\Theta \\ \frac{1}{2}\Gamma^{-1/2}L^T \end{pmatrix}^T v_d(t), \\ z_d(t) &= \Gamma^{1/2}\Lambda_2 F^T x_d(t) \end{aligned}$$

выполняется неравенство (4.10).

Следствие 4.2. Записывая неравенство (4.10) для системы (4.12) в виде линейного матричного неравенства, получим, что система (2.1)–(2.3) с заданными матрицами  $A, B$  и  $F$  будет абсолютно устойчивой и выполняется ограничение (2.4) при законе управления  $u = \Theta x$ , где  $\Theta = QP^{-1}$ ,

а  $P = P^T > 0$ ,  $Q$ ,  $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_{n_y}) > 0$  и  $\gamma^2 > 0$  удовлетворяют следующим линейным матричным неравенствам в дискретном случае:

$$(4.13) \quad \begin{pmatrix} -P & * & * & * \\ AP + BQ + F\Lambda L^T P & -P + F\Lambda_2\Gamma\Lambda_2 F^T & * & * \\ CP + DQ & 0 & -I & * \\ \frac{1}{2}L^T P & 0 & 0 & -\Gamma \end{pmatrix} < 0,$$

$$\begin{pmatrix} P & * \\ I & \gamma^2 R^{-1} \end{pmatrix} > 0$$

и в непрерывном случае:

$$(4.14) \quad \begin{pmatrix} AP + PA^T + BQ + Q^T B^T + F\Lambda L^T P + PL\Lambda F^T + F\Lambda_2\Gamma\Lambda_2 F^T & * & * \\ CP + DQ & -I & * \\ \frac{1}{2}L^T P & 0 & -\Gamma \end{pmatrix} < 0,$$

$$\begin{pmatrix} P & * \\ I & \gamma^2 R^{-1} \end{pmatrix} > 0.$$

## 5. Синтез оптимальных абсолютно стабилизирующих законов управления

Представим уравнения замкнутой неизвестной системы (2.1)–(2.3) в виде

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \partial x(t) &= (A + B\Theta + F\Lambda_1 L^T)x(t) + F\Lambda_2 \hat{v}(t), \\ z(t) &= (C + D\Theta)x(t), \end{aligned}$$

$$(5.2) \quad \hat{v} = \hat{\varphi}(y, t), \quad y = L^T x,$$

где компоненты вектор-функции  $\hat{\varphi}(y, t)$  определяются, как в (4.1), и принадлежат сектору  $[0, 1]$ . В следующей теореме параметры линейных обратных связей, которые обеспечивают абсолютную устойчивость неизвестной нелинейной системы Лурье и гарантированное значение функционала, выражаются в терминах экспериментальных и априорных данных.

*Теорема 5.1. Система Лурье (2.1)–(2.3) с обратной связью  $u = \Theta x$  абсолютно устойчива и функционал (3.16) ограничен  $J(\Theta) < \gamma^2$ , если  $\Theta = QP^{-1}$ , где  $P = P^T > 0$ ,  $Q$ ,  $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_{n_y}) > 0$ ,  $\gamma^2 > 0$ ,  $\mu_1 \geq 0$  и  $\mu_2 \geq 0$  удовлетворяют следующим линейным матричным неравенствам в*

дискретном случае:

$$(5.3) \quad \left( \begin{array}{cccc} -P & * & * & * \\ \left( \begin{array}{c} P \\ Q \\ \Lambda L^T P \end{array} \right) & \widehat{\Lambda}_2 \Gamma \widehat{\Lambda}_2^T - \sum_{k=1}^2 \mu_k \Psi_{11}^{(k)} & * & * \\ 0 & -\sum_{k=1}^2 \mu_k \Psi_{21}^{(k)} & -P - \sum_{k=1}^2 \mu_k \Psi_{22}^{(k)} & * \\ \left( \begin{array}{ccc} C & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} I \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} P \\ Q \\ L^T P \end{array} \right) & 0 & 0 & -\left( \begin{array}{c} I \ * \\ 0 \ \Gamma \end{array} \right) \end{array} \right) < 0,$$

$$\left( \begin{array}{cc} P & * \\ I & \gamma^2 R^{-1} \end{array} \right) > 0$$

и в непрерывном случае:

$$(5.4) \quad \left( \begin{array}{ccc} \widehat{\Lambda}_2 \Gamma \widehat{\Lambda}_2^T - \sum_{k=1}^2 \mu_k \Psi_{11}^{(k)} & * & * \\ \left( \begin{array}{c} P \\ Q \\ \Lambda L^T P \end{array} \right)^T - \sum_{k=1}^2 \mu_k \Psi_{21}^{(k)} & -\sum_{k=1}^2 \mu_k \Psi_{22}^{(k)} & * \\ 0 & \left( \begin{array}{ccc} C & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} I \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} P \\ Q \\ L^T P \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} I \ * \\ 0 \ \Gamma \end{array} \right) \end{array} \right) < 0,$$

$$\left( \begin{array}{cc} P & * \\ I & \gamma^2 R^{-1} \end{array} \right) > 0,$$

в которых  $\widehat{\Lambda}_2 = \text{col}(0, 0, \Lambda_2)$ , а  $\Psi_{ij}^{(k)}$  – соответствующие блоки матриц  $\Psi^{(1)}$  и  $\Psi^{(2)}$ , заданные в (3.7) и (3.15).

*Доказательство теоремы 5.1.* Согласно теореме 4.1 система (5.1), (5.2) будет абсолютно устойчивой и  $J(\Theta) < \gamma^2$ , если обобщенная  $H_\infty$ -норма с весовой матрицей  $\gamma^{-2}R$  от входа  $v$  к выходу  $z$  линейной системы (4.11) меньше 1. В свою очередь, это условие выполняется по лемме 4.2 тогда и только тогда, когда обобщенная  $H_\infty$ -норма двойственной системы (4.12) меньше 1. Учитывая введенные обозначения, представим уравнения (4.12) в виде

$$(5.5) \quad \partial x_d(t) = \left( \begin{array}{c} I \\ \Theta \\ \Lambda L^T \end{array} \right)^T \left[ \Delta^T x_d(t) + \left( \begin{array}{cc} C^T & 0 \\ D^T & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \Lambda^{-1} \Gamma^{-1/2} \end{array} \right) v_d(t) \right],$$

$$z_d(t) = \Gamma^{1/2} \widehat{\Lambda}_2^T \Delta^T x_d(t).$$

Рассмотрим систему, которую назовем расширенной, с дополнительными искусственными входом  $w_\Delta(t) \in L_2$  и выходом  $z_\Delta(t)$ , определяемую уравнениями

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= \begin{pmatrix} I \\ \Theta \\ \Lambda L^T \end{pmatrix}^T \left[ w_\Delta(t) + \begin{pmatrix} C^T & 0 \\ D^T & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\Lambda^{-1}\Gamma^{-1/2} \end{pmatrix} v_a(t) \right], \\ z_a(t) &= \Gamma^{1/2} \widehat{\Lambda}_2^T w_\Delta(t), \quad z_\Delta(t) = x_a(t). \end{aligned}$$

Заметим, что при  $w_\Delta(t) = \Delta^T z_\Delta(t)$  уравнения (5.6) совпадают с уравнениями (5.5). Допустим, что дополнительные входной и выходной сигналы в системе (5.6) при всех  $t \geq 0$  удовлетворяют двум неравенствам

$$(5.7) \quad \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^T \Psi^{(1)} \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} \leq 0, \quad \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^T \Psi^{(2)} \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} \leq 0,$$

где матрицы  $\Psi^{(1)}$  и  $\Psi^{(2)}$  заданы в (3.7) и (3.15). Множество всех таких сигналов  $w_\Delta(t)$  обозначим через  $\mathbf{W}_\Delta$ . При  $w_\Delta(t) = \Delta^T z_\Delta(t)$  для всех  $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ , как следует из (3.6) и (3.14), выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^T \Psi^{(1)} \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} &= z_\Delta^T(t) \begin{pmatrix} \Delta^T \\ I \end{pmatrix}^T \Psi^{(1)} \begin{pmatrix} \Delta^T \\ I \end{pmatrix} z_\Delta(t) \leq 0, \\ \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^T \Psi^{(2)} \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} &= z_\Delta^T(t) \begin{pmatrix} \Delta^T \\ I \end{pmatrix}^T \Psi^{(2)} \begin{pmatrix} \Delta^T \\ I \end{pmatrix} z_\Delta(t) \leq 0. \end{aligned}$$

Таким образом,  $w_\Delta(t) = \Delta^T z_\Delta(t) \in \mathbf{W}_\Delta$  и, следовательно, система (5.5) при  $\Delta \in \mathbf{\Delta}$  “погружена” в расширенную систему (5.6), (5.7).

Приведем далее доказательство только для непрерывного случая, так как в дискретном случае оно аналогично. Выясним условия, при которых существует положительно определенная квадратичная функция  $V(x_a) = x_a^T P x_a$  с  $P > \gamma^{-2} R$ , для которой в силу уравнений расширенной системы (5.6) при всех  $w_\Delta(t)$ , удовлетворяющих неравенствам (5.7), при всех  $x_a, v_a$  ( $|x_a|^2 + |v_a|^2 \neq 0$ ) выполняется неравенство

$$(5.8) \quad \dot{V} + |z_a|^2 - |v_a|^2 < 0.$$

Достаточным условием для этого в силу  $S$ -процедуры является существование функции  $V(x_a) = x_a^T P x_a$  с  $P > \gamma^{-2} R$ , для которой в силу уравнений (5.6) при всех  $x_a, v_a, w_\Delta$ , одновременно не обращающихся в ноль, и некоторых  $\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0$  выполняется неравенство

$$(5.9) \quad \dot{V} + |z_a|^2 - |v_a|^2 - \sum_{k=1}^2 \mu_k \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix}^T \Psi^{(k)} \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix} < 0.$$



но, с одной стороны, когда априорная информация достаточно грубая, т.е. радиус  $\rho$  матричной сферы в (3.13) достаточно велик и соответственно  $\gamma_a$  принимает большое значение, то  $\gamma_*$  может оказаться малой, если помехи в измерениях не очень большие, т.е. небольшим является матричный эллипсоид  $\Delta_p$ . С другой стороны, если помехи в измерениях оказываются достаточно большими и соответственно большой является  $\gamma_p$  или, более того, если информационная матрица является вырожденной, а матричный эллипсоид  $\Delta_p$  оказывается неограниченным, то  $\gamma_*$  может тем не менее стать малой за счет малости радиуса матричной сферы при использовании априорной информации. Эти выводы будут подтверждены результатами математического моделирования в разделе 6.

## 6. Иллюстративный пример: нелинейный осциллятор

Приведем результаты построения абсолютно стабилизирующего закона управления для дискретной модели

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 - \delta h \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -h\omega^2 \end{pmatrix} \varphi(y(t)) + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} w(t),$$

$$y(t) = (1 \ 0)x(t), \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1 \end{pmatrix} u$$

нелинейной системы

$$\ddot{\psi} + \delta\dot{\psi} + \omega^2\varphi(\psi) = u + w,$$

где  $x = \text{col}(\psi, \dot{\psi})$  и нелинейность  $\varphi(\psi)$  удовлетворяет условию (2.3) при  $\alpha = -2/3\pi$ ,  $\beta = 1$ . При реализации рассматриваемого синтеза управления для непрерывной системы требуется вычислять производные, что влечет появление дополнительного возмущения, границы которого трудно оценить заранее. В этом смысле дискретный вариант является более предпочтительным. В эксперименте предполагалось, что реальный объект – это нелинейный осциллятор, для которого  $\varphi(\psi) = \sin \psi$ , коэффициент демпфирования  $\delta = 0,1$  и частота  $\omega^2 = 1$ , а для номинального объекта  $\delta_* = 0$ ,  $\omega_*^2 = 0,8$ . Были выбраны шаг  $h = 0,2$ , весовая матрица  $R = 0,1I$  и радиус априорной неопределенности  $\rho = 0,05$ . Для каждого значения уровня возмущения  $d$  проводилось десять измерений, т.е.  $N = 10$ . В эксперименте начальные условия и управление случайны в интервале  $[-1, 1]$ , возмущение  $w(t)$  случайно в интервале  $[-d, d]$ . Неравенства (5.3) решались с использованием пакета CVX, в котором для решения строгих неравенств следует “слегка отступить от нуля”.

На рисунках показаны результаты, полученные усреднением по 20 независимым экспериментам. Из рис. 2 можно сделать следующие выводы. С увеличением уровня возмущения гарантированное значение функционала  $\gamma_*$ , получаемое на основе экспериментальных и априорных данных, возрастает, оставаясь при этом значительно меньше (при относительно малых уровнях возмущения) гарантированного значения функционала  $\gamma_a$ , полученного только по

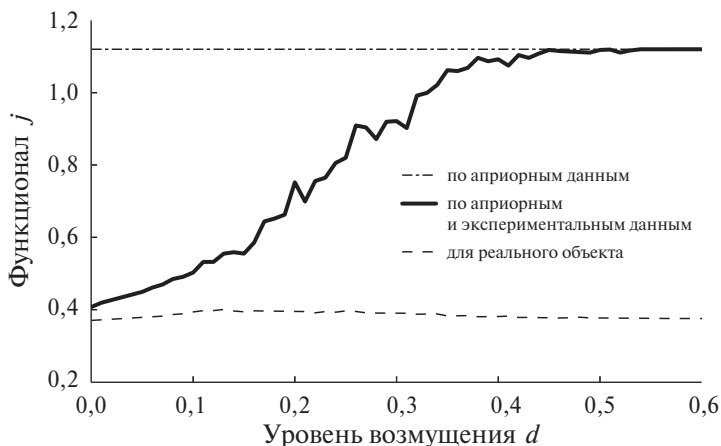


Рис. 2. Гарантированные значения функционала при робастном управлении на основе экспериментальных и априорных данных и значения функционала при этом управлении для реального объекта как функции уровня возмущения.

априорной информации. Это объясняется тем, что с ростом уровня возмущения расширяется множество объектов  $\Delta_p$ , согласованных с экспериментальными данными. Начиная с некоторого уровня возмущения (в данном случае примерно с  $d = 0,5$ ) множество  $\Delta_p$  включает в себя множество объектов  $\Delta_a$ , выделяемых на основе априорной информации, и, следовательно, при дальнейшем росте уровня возмущения рост  $\gamma_*$  прекращается и  $\gamma_* = \gamma_a$ . Пунктирная кривая на рис. 2 соответствует значениям функционала для реального объекта (если бы он был известен) при полученном робастном управлении на основе экспериментальных и априорных данных при различных уровнях возмущения. Как следует из экспериментов, это значение слабо зависит от уровня возмущения и достаточно близко к оптимальному значению для известного объекта, т.е.  $\gamma^2 \approx 0,39$ .

Оптимальное управление и соответствующее значение функционала для реального объекта (если бы он был известен), вычисленные с помощью решения линейных матричных неравенств (4.13), следующие:

$$u = -6,58x_1 - 4,59x_2, \quad \gamma^2 = 0,36.$$

Робастное управление и соответствующее значение функционала, вычисленные на основе только априорной информации с помощью линейных матричных неравенств (5.3) при  $\mu_1 = 0$ , следующие:

$$u = -6,45x_1 - 5,38x_2, \quad \gamma_a^2 = 1,12.$$

Робастное управление и соответствующее значение функционала, вычисленные по априорным и экспериментальным данным в одном из экспериментов при уровне возмущения  $d = 0,1$  с помощью линейных матричных неравенств (5.3) при  $\mu_1 \geq 0$  и  $\mu_2 \geq 0$ , следующие:

$$u = -9,35x_1 - 6,61x_2, \quad \gamma_*^2 = 0,52.$$

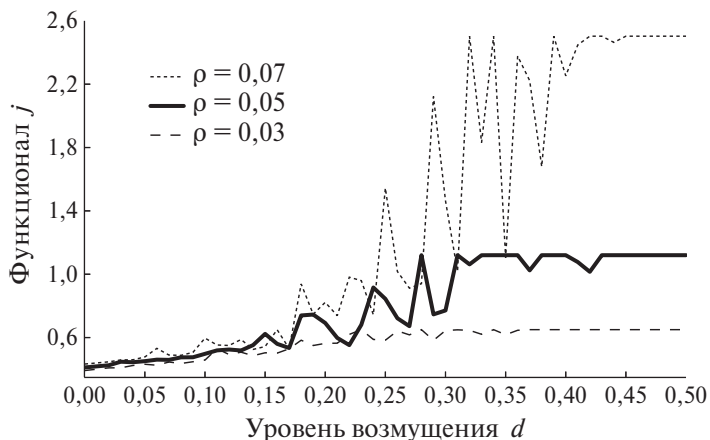


Рис. 3. Гарантированные значения функционала при робастном управлении на основе экспериментальных и априорных данных при различных радиусах матричных сфер в априорной информации как функции уровня возмущения.

Заметим, как показал эксперимент, если робастное управление строится только на основе экспериментальных данных без учета априорной информации, т.е. вычисляется с помощью линейных матричных неравенств (5.3) при  $\mu_2 = 0$ , то уже при сравнительно малых уровнях возмущения наблюдаются очень большие гарантированные значения функционала. Это объясняется тем, что даже при малых случайных возмущениях эллипсоид  $\Delta_p$  может оказаться достаточно большим или даже вырожденным, т.е. неограниченным. Таким образом, учет априорной информации оказывает регуляризирующее влияние на синтез робастного управления по экспериментальным данным, причем даже в том случае, когда единого робастного регулятора на всем множестве объектов  $\Delta_a$ , выделяемых по априорной информации, не существует.

На рис. 3 видно, как увеличение радиуса матричной сферы в априорной информации влияет на гарантированное значение функционала при робастном управлении, построенном на основе априорных и экспериментальных данных.

## 7. Заключение

В статье разработан метод синтеза абсолютно стабилизирующего управления для неизвестных систем Лурье, которое обеспечивает гарантированное значение интегрального квадратичного функционала, характеризующего переходной процесс в замкнутой системе при неопределенных начальных условиях. К экспериментальным данным не предъявляются требования исключающего возбуждения в системе, необходимые для идентифицируемости системы. Полученные линейные матричные неравенства для вычисления параметров обратной связи позволяют, в частности, находить законы управления

на основе только априорных, только экспериментальных и совместно тех и других данных. Результаты экспериментов с нелинейным осциллятором подтверждают преимущество законов управления, синтезируемых с использованием экспериментальных и априорных данных, над законами управления, получаемыми на основе только экспериментальных или только априорных данных.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство леммы 3.1.* Запишем неравенство (3.5) в виде

$$\Delta \widehat{X} \widehat{X}^T \Delta^T - X_+ \widehat{X}^T \Delta^T - \Delta \widehat{X} X_+^T + X_+ X_+^T - \Omega \leq 0$$

и с учетом замены переменных представим его как

$$\widehat{\Delta}^{(1)} \Sigma^2 \widehat{\Delta}^{(1)T} - X_+ \widehat{X}^{(1)T} \widehat{\Delta}^{(1)T} - \widehat{\Delta}^{(1)} \widehat{X}^{(1)} X_+^T + X_+ X_+^T - \Omega \leq 0.$$

Выделяя полный квадрат, получим

$$[\widehat{\Delta}^{(1)} - X_+ \widehat{X}^{(1)T} \Sigma^{-2}] \Sigma^2 [\widehat{\Delta}^{(1)} - X_+ \widehat{X}^{(1)T} \Sigma^{-2}]^T \leq \Gamma,$$

где  $\Gamma$  задана в (3.11). Подставляя сюда выражение для  $X_+$  из (3.9) и учитывая, что  $\widehat{X}^{(1)} \widehat{X}^{(1)T} = \Sigma^2$ , получим  $\Gamma = \Omega + W(\widehat{X}^{(1)T} \Sigma^{-2} \widehat{X}^{(1)} - I)W^T$ . С учетом (3.4) отсюда следует, что  $\Gamma \geq 0$ . Вычисляя градиент по  $\widehat{\Delta}^{(1)}$  от матричной нормы невязки, т.е. функции  $\text{tr}(X_+ - \widehat{\Delta}^{(1)} \widehat{X}^{(1)})^T (X_+ - \widehat{\Delta}^{(1)} \widehat{X}^{(1)})$ , и приравнявая его к нулю  $-2X_+ \widehat{X}^{(1)T} + 2\widehat{\Delta}^{(1)} \widehat{X}^{(1)} \widehat{X}^{(1)T} = 0$ , выразим оценку  $\Delta_{LS}^{(1)}$  методом наименьших квадратов неизвестной матрицы  $\Delta_{real}^{(1)}$  в (3.9) как  $\widehat{\Delta}_{LS}^{(1)} = X_+ \widehat{X}^{(1)T} \Sigma^{-2}$ .

*Доказательство леммы 4.1.* Полагая в (4.6)  $v = \varphi(y, t)$  и учитывая, что  $\varphi_i(y_i, t)[\varphi_i(y_i, t) - y_i] \leq 0$ , получим, что по траектории системы (4.4), (4.5) выполняется соответствующее неравенство  $\Delta V + |z|^2 < 0$  или  $\dot{V} + |z|^2 < 0$  и, следовательно,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ . Суммируя или интегрируя и учитывая, что  $Y < \gamma^2 R^{-1}$ , получим  $\|z\|^2 < \gamma^2 x_0^T R^{-1} x_0$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.: Гостехиздат, 1951.
2. Коган М.М., Степанов А.В. Синтез субоптимальных робастных регуляторов на основе априорных и экспериментальных данных // АиТ. 2023. № 8. С. 24–42.
3. Коган М.М., Степанов А.В. Синтез обобщенного  $H_\infty$ -субоптимальных управления по экспериментальным и априорным данным // АиТ. 2024. № 1. С. 3–20.
4. Коган М.М., Степанов А.В. Как улучшить робастное управление линейной нестационарной системой с помощью экспериментальных данных // АиТ. 2024. № 6. С. 115–139.

5. *Petersen I.R., Tempo R.* Robust Control of Uncertain Systems: Classical Results and Recent Developments // *Automatica*. 2014. V. 50. No. 5. P. 1315–1335.
6. *De Persis C., Tesi P.* Formulas for Data-Driven Control: Stabilization, Optimality and Robustness // *IEEE Trans. Automat. Control*. 2020. V. 65. No. 3. P. 909–924.
7. *Waarde H. J., Eising J., Trentelman H.L., Camlibel M.K.* Data Informativity: a New Perspective on Data-Driven Analysis and Control // *IEEE Trans. Automat. Control*. 2020. V. 65. No. 11. P. 4753–4768.
8. *Berberich J., C.W. Scherer C.W., Allgower F.* Combining Prior Knowledge and Data for Robust Controller Design // *IEEE Trans. Automat. Control*. 2023. V. 68. No. 8. P. 4618–4633.
9. *Luppi A., De Persis C., Tesi P.* On data-driven stabilization of systems with quadratic nonlinearities // arXiv: 2103.15631v1 [eess.SY] 29 Mar 2021.
10. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
11. *Коган М.М.* Минимаксный подход к синтезу абсолютно стабилизирующих регуляторов для нелинейных систем Лурье // *АиТ*. 1999. № 5. С. 78–90.
12. *Геллиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
13. *Polyak B.T.* Convexity of Quadratic Transformations and Its Use in Control and Optimization // *J. Optim. Theory Appl.* 1998. V. 99. No. 3. P. 553–583.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.В. Кузнецовым.*

Поступила в редакцию 18.01.2024

После доработки 20.08.2024

Принята к публикации 26.11.2024

© 2025 г. М.В. КУКОВЕРОВ (gedevan\_space@mail.ru)  
(Публичное акционерное общество  
“Московская объединенная энергетическая компания”)

## К ВЫЧИСЛЕНИЮ РАЗМЕРА ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ШУРУ

Рассматривается подмножество области устойчивости по Шуру, а именно область параметров, при которых корни полинома степени  $n$  по модулю не превышают единицы и являются вещественными числами. Проведена оценка площади гиперповерхности рассмотренной многомерной области в зависимости от количества измерений  $n$ . Максимальное значение площади достигается при  $n = 3$ .

*Ключевые слова:* многомерные интегралы, область устойчивости по Шуру, авторегрессия, стационарные авторегрессионные процессы, пограничные процессы.

DOI: 10.31857/S0005231025020024, EDN: IRBDBVH

### 1. Введение

Ряд современных исследований посвящен изучению области устойчивости по Шуру полиномов степени  $n$  в пространстве параметров, а также изучению ее границы [1]. При этом вопрос определения размера границы этой области, т.е. площади ее гиперповерхности, остается открытым.

Будем рассматривать полиномы вида

$$(1) \quad x^n - \alpha_1 x^{n-1} - \dots - \alpha_{n-1} x - \alpha_n = 0,$$

где параметры  $\alpha_i \in R$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Каждому полиному соответствует точка  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  в  $n$ -мерном евклидовом пространстве параметров  $R^n$ .

Область устойчивости по Шуру – это область параметров в  $R^n$ , при которых все корни полиномов находятся внутри единичного круга на комплексной плоскости. Указанную область обозначим через  $D_n$ , как в [2]. В указанной работе представлена формула для расчета объема  $V(D_n)$  области  $D_n$ .

Область параметров внутри  $D_n$ , т.е. подмножество в  $D_n$ , при которых все корни полиномов являются вещественными, обозначим через  $\mathcal{E}_n$ , как в [3]. В этой работе с использованием многомерных интегралов Селберга найдена формула для расчета объема  $V(\mathcal{E}_n)$  области  $\mathcal{E}_n$ .

Размеры областей устойчивости полиномов [2, 3]

| $n$ | $V(D_n)$ | $V(\mathcal{E}_n)$ | $V(D_n \setminus \mathcal{E}_n)$ | $\frac{V(\mathcal{E}_n)}{V(D_n)}$ | $\frac{V(D_n \setminus \mathcal{E}_n)}{V(D_n)}$ |
|-----|----------|--------------------|----------------------------------|-----------------------------------|---|
| «1» | «2»      | «3»                | «4»                              | «5»                               | «6»   |
| 1   | 2        | 2                  | 0                                | 1                                 | 0   |
| 2   | 4        | 1,333              | 2,667                            | 0,3333                            | 0,6667  |
| 3   | 5,333    | 0,355              | 4,978                            | 0,0667                            | 0,9333  |
| 4   | 7,111    | 0,041              | 7,070                            | 0,0057                            | 0,9943  |
| 5   | 7,585    | 0,002              | 7,583                            | 0,0003                            | 0,9997  |

Величины  $V(D_n)$  и  $V(\mathcal{E}_n)$  достигают максимума при  $n = 6$  и  $n = 1$  и являются бесконечно малыми величинами при  $n \rightarrow \infty$ .<sup>1</sup>

Граница  $\partial D_n$  области  $D_n$  состоит из двух гиперплоскостей и одной гиперповерхности [1, 4]. Гиперплоскости соответствуют корням  $-1$  и  $1$ .

Граница  $\partial \mathcal{E}_n$  области  $\mathcal{E}_n$  состоит из двух гиперплоскостей, которые соответствуют гиперплоскостям поверхности области  $D_n$ , и одной гиперповерхности, которая находится внутри области  $D_n$ .

В данной работе представлены результаты вычисления размеров  $S(\partial \mathcal{E}_n)$  границ  $\partial \mathcal{E}_n$  области  $\mathcal{E}_n$ .

## 2. Вычисление $S(\partial \mathcal{E}_2)$

Рассмотрим полином степени 2:

$$(2) \quad x^2 - \alpha_1 x - \alpha_2 = 0.$$

Областью  $D_2$  является множество параметров:

$$\begin{cases} -2 < \alpha_1 < 2, \\ -1 < \alpha_2 < 1 - |\alpha_1|. \end{cases}$$

Областью  $\mathcal{E}_2$  является множество параметров:

$$\begin{cases} -2 < \alpha_1 < 2, \\ -\alpha_1^2/4 < \alpha_2 < 1 - |\alpha_1|. \end{cases}$$

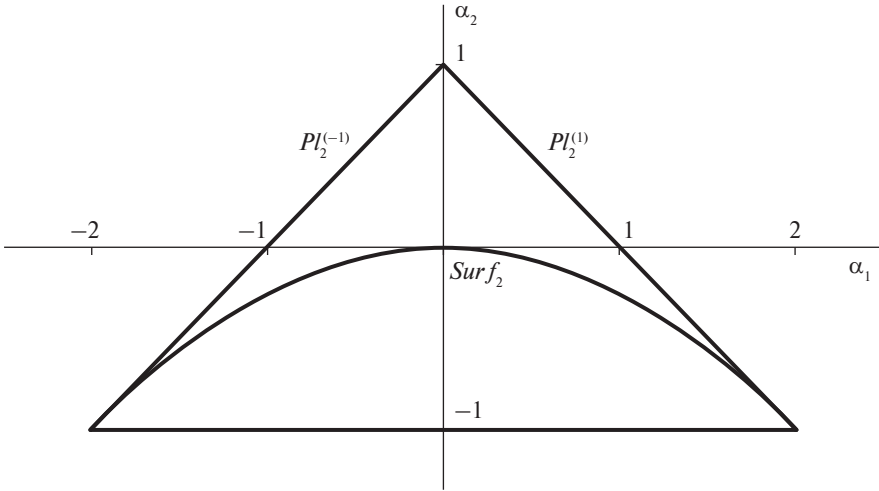
С эконометрической точки зрения на рисунке изображены области стационарности, параметры из которых соответствуют стационарным авторегрессионным процессам 2-го порядка, а внешняя граница соответствует пограничным процессам.

Граница  $\partial \mathcal{E}_2$  состоит из участка параболы  $Surf_2$  и двух отрезков  $Pl_2^{(1)}$  и  $Pl_2^{(-1)}$ , которые соответствуют корням  $1$  и  $-1$ . То есть полином (2) с па-

<sup>1</sup> Несмотря на то, что сравнение несоизмеримых по размерности величин, таких как длина, площадь, объем и пр., может вызывать неопределенность, тем не менее в ряде случаев это может вызывать интерес. См., например, исследование данного вопроса для сферы и шара:

<https://mathworld.wolfram.com/Hypersphere.html>

<https://mathworld.wolfram.com/Ball.html>



Области  $D_2$  и  $\mathcal{E}_2$ . Источник: [5].

параметрами из участка  $Pl_2^{(1)}$  будет иметь корень, равный 1, а полином (2) с параметрами из участка  $Pl_2^{(-1)}$  будет иметь корень, равный  $-1$ .

Длину границы  $S(\partial\mathcal{E}_2)$  можно вычислить как сумму длин указанных участков:

$$S(\partial\mathcal{E}_2) = S(Pl_2^{(1)}) + S(Pl_2^{(-1)}) + S(Surf_2) \approx 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4,591 \approx 10,248.$$

### 3. Вычисление $S(\partial\mathcal{E}_3)$

Рассмотрим полином степени 3:

$$(3) \quad x^3 - \alpha_1 x^2 - \alpha_2 x - \alpha_3 = 0.$$

В [6] показано, что областью  $D_3$  является множество параметров:

$$\begin{cases} -1 < \alpha_3 < 1, \\ -3 < \alpha_1 < 3, \\ \alpha_2 < 1 - |\alpha_1 + \alpha_3|, \\ \alpha_2 > -1 + \alpha_3^2 - \alpha_1 \alpha_3. \end{cases}$$

Областью  $\mathcal{E}_3$  является множество параметров:

$$\begin{cases} -1 < \alpha_3 < 1, \\ -3 < \alpha_1 < 3, \\ \alpha_2 < 1 - |\alpha_1 + \alpha_3|, \\ \alpha_1^2 \alpha_2^2 + 4\alpha_2^3 - 4\alpha_1^3 \alpha_3 - 27\alpha_3^2 - 18\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 > 0. \end{cases}$$

Граница  $\partial\mathcal{E}_3$  состоит из поверхности  $Surf_3$  и участков плоскостей  $Pl_3^{(1)}$  и  $Pl_3^{(-1)}$ , которые соответствуют корням 1 и  $-1$ . То есть полином (3) с параметрами из участка  $Pl_3^{(1)}$  будет иметь корень, равный 1, а полином (3) с параметрами из участка  $Pl_3^{(-1)}$  будет иметь корень, равный  $-1$ . Используя формулы Виета, указанные поверхности можно представить в параметрическом виде.

Параметрический вид  $Pl_3^{(1)}$ :

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 + x_2 + x_3, \\ \alpha_2 = -x_2 - x_3 - x_2x_3, \\ \alpha_3 = x_2x_3, \end{cases}$$

где корни полинома (3)  $x_1 = 1$ ,  $x_2 \in [-1, 1]$ ,  $x_3 \in [-1, x_2]$ .

Параметрический вид  $Pl_3^{(-1)}$ :

$$\begin{cases} \alpha_1 = -1 + x_2 + x_3, \\ \alpha_2 = x_2 + x_3 - x_2x_3, \\ \alpha_3 = -x_2x_3, \end{cases}$$

где корни полинома (3)  $x_1 = -1$ ,  $x_2 \in [-1, 1]$ ,  $x_3 \in [-1, x_2]$ .

Параметрический вид  $Surf_3$ :

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha_1 = 2t + x_3, \\ \alpha_2 = -t^2 - 2tx_3, \\ \alpha_3 = t^2x_3, \end{cases}$$

где корни полинома (3)  $x_1 = x_2 = t$ ,  $t \in [-1, 1]$ ,  $x_3 \in [-1, 1]$ .

Площадь границы  $S(\partial\mathcal{E}_3)$  можно вычислить как сумму площадей указанных поверхностей:

$$(5) \quad \begin{aligned} S(\partial\mathcal{E}_3) &= S(Pl_3^{(1)}) + S(Pl_3^{(-1)}) + S(Surf_3) \approx \\ &\approx \sqrt{3} \times \frac{4}{3} + \sqrt{3} \times \frac{4}{3} + 6,759 \approx 11,378. \end{aligned}$$

#### 4. Вычисление $S(\partial\mathcal{E}_n)$

Рассмотрим полином степени  $n$  вида (1).

Граница  $\partial\mathcal{E}_n$  области  $\mathcal{E}_n$  состоит из гиперповерхности  $Surf_n$  и участков гиперплоскостей  $Pl_n^{(1)}$  и  $Pl_n^{(-1)}$ , которые соответствуют корням 1 и  $-1$ , т.е. полином (1) с параметрами из участка  $Pl_n^{(1)}$  будет иметь корень, равный 1, а полином (1) с параметрами из участка  $Pl_n^{(-1)}$  будет иметь корень, равный  $-1$ .

Утверждения о размерах участков гиперплоскостей  $Pl_n^{(1)}$  и  $Pl_n^{(-1)}$  и гиперповерхности  $Sur f_n$  сформулируем в виде теорем.

*Теорема 1. Площади участков гиперплоскостей  $Pl_n^{(1)}$  и  $Pl_n^{(-1)}$ ,  $n \geq 2$ , можно представить в виде*

$$(6) \quad S(Pl_n^{(1)}) = S(Pl_n^{(-1)}) = \sqrt{n} \times 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\{(k-1)!\}^2}{(2k-1)!}.$$

*Теорема 2. Площадь гиперповерхности  $Sur f_n$ ,  $n \geq 3$ , можно представить в виде*

$$(7) \quad S(Sur f_n) = 2 \int_{\substack{x_1 \in (-1,1) \\ -1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq 1}} \dots \int \frac{\sqrt{1-x_1^{2n}}}{\sqrt{1-x_1^2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} |x_i - x_j| dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

В частности, при  $n = 3$

$$S(Sur f_3) = 2 \iint_{\substack{-1 \leq x_1 \leq 1 \\ -1 \leq x_2 \leq 1}} \frac{\sqrt{1-x_1^6}}{\sqrt{1-x_1^2}} |x_1 - x_2| dx_1 dx_2 \approx 6,759.$$

Размер  $S(\partial \mathcal{E}_n)$  границы  $\partial \mathcal{E}_n$  можно вычислить, как сумму

$$(8) \quad S(\partial \mathcal{E}_n) = S(Pl_n^{(1)}) + S(Pl_n^{(-1)}) + S(Sur f_n).$$

Основной результат статьи представлен в следующей теореме.

*Теорема 3. Размер  $S(\partial \mathcal{E}_n)$  границы  $\partial \mathcal{E}_n$  является бесконечно малой величиной при  $n \rightarrow \infty$ . Максимальное значение достигается при  $n = 3$ .*

## 5. Заключение

В работе представлены результаты расчетов размеров  $S(\partial \mathcal{E}_n)$  границы  $\partial \mathcal{E}_n$  области  $\mathcal{E}_n$  в  $n$ -мерном пространстве параметров полиномов, являющейся подмножеством области устойчивости по Шуру  $D_n$ .

Представляется целесообразным дальнейшее изучение вопроса определения размера границы  $\partial D_n$  области  $D_n$ . Как уже было отмечено, граница  $\partial D_n$  области  $D_n$  состоит из двух гиперплоскостей, соответствующих корням  $-1$  и  $1$ , и одной гиперповерхности, которая обозначена как  $\mathfrak{S}_n$ . Вычисление площади  $S(\mathfrak{S}_n)$  для произвольного  $n$  представляется более сложной задачей, по сравнению с результатом (7) теоремы 2.

Доказательство теоремы 1. Стандартными вычислениями можно проверить, что (6) выполняется для  $n = 2, 3$ . На основании (6) получаем

$$\begin{aligned} S(Pl_2^{(1)}) &= 2\sqrt{2}, \\ S(Pl_3^{(1)}) &= \sqrt{3} \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

что соответствует значениям, вычисленным в разделах 2 и 3.

Докажем (6) для произвольного  $n$ .

Участок гиперплоскости  $Pl_n^{(1)}$  может быть параметризован так:

$$(II.1) \quad \begin{cases} \alpha_1 = 1 + \zeta_1 \\ \alpha_2 = -(\zeta_1 + \zeta_2) \\ \alpha_3 = \zeta_2 + \zeta_3 \\ \dots \\ \alpha_k = (-1)^{k-1}(\zeta_{k-1} + \zeta_k) \\ \dots \\ \alpha_{n-2} = (-1)^{n-3}(\zeta_{n-3} + \zeta_{n-2}) \\ \alpha_{n-1} = (-1)^{n-2}(\zeta_{n-2} + \zeta_{n-1}) \\ \alpha_n = (-1)^{n-1}\zeta_{n-1}, \end{cases}$$

где  $\zeta_i, i = 1, \dots, n-1$  – это элементарный симметрический многочлен степени  $i$  от  $(n-1)$  переменных  $x_2, \dots, x_n, -1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1$ .

Параметризация (II.1) получена на основании формул Виета после приравнивания корня  $x_1 = 1$ . Упорядочивание параметров  $x_2, \dots, x_n$  связано с тем, что параметризация (II.1) симметрична относительно перестановок указанных параметров.

По определению

$$(II.2) \quad S(Pl_n^{(1)}) = \int_{-1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1} \dots \int \|H_n\| dx_2 \dots dx_n,$$

где  $H_n$  – определитель:

$$(II.3) \quad H_n = \begin{vmatrix} j_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_n} \\ j_2 & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j_n & \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_2} & \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

где  $\{j_1, \dots, j_n\}$  – ортонормированный базис в пространстве  $R^n$ .

Заметим, что для  $\zeta_i$  в (П.1) выполняется равенство

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_r} = \zeta_{i-1}^{(r)},$$

где  $\zeta_j^{(r)}$  – это элементарный симметрический многочлен степени  $j$  от  $n-2$  переменных  $x_2, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n$ .

Без ограничения общности пусть  $n = 2k + 1$ . Тогда на основании (П.3) и (П.1) получаем, что

$$(П.4) \quad H_n = \begin{vmatrix} j_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ j_2 & -1 - \zeta_1^{(2)} & -1 - \zeta_1^{(3)} & \cdots & -1 - \zeta_1^{(n)} \\ j_3 & \zeta_1^{(2)} + \zeta_2^{(2)} & \zeta_1^{(3)} + \zeta_2^{(3)} & \cdots & \zeta_1^{(n)} + \zeta_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j_{n-1} & -\zeta_{n-3}^{(2)} - \zeta_{n-2}^{(2)} & -\zeta_{n-3}^{(3)} - \zeta_{n-2}^{(3)} & \cdots & -\zeta_{n-3}^{(n)} - \zeta_{n-2}^{(n)} \\ j_n & \zeta_{n-2}^{(2)} & \zeta_{n-2}^{(3)} & \cdots & \zeta_{n-2}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим  $H_n^{(n)}$  – алгебраическое дополнение элемента  $j_n$  в  $H_n$ :

$$H_n^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 - \zeta_1^{(2)} & -1 - \zeta_1^{(3)} & \cdots & -1 - \zeta_1^{(n)} \\ \zeta_1^{(2)} + \zeta_2^{(2)} & \zeta_1^{(3)} + \zeta_2^{(3)} & \cdots & \zeta_1^{(n)} + \zeta_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\zeta_{n-3}^{(2)} - \zeta_{n-2}^{(2)} & -\zeta_{n-3}^{(3)} - \zeta_{n-2}^{(3)} & \cdots & -\zeta_{n-3}^{(n)} - \zeta_{n-2}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Стандартными преобразованиями строк  $H_n^{(n)}$  можно привести к виду

$$H_n^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -\zeta_1^{(2)} & -\zeta_1^{(3)} & \cdots & -\zeta_1^{(n)} \\ \zeta_2^{(2)} & \zeta_2^{(3)} & \cdots & \zeta_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\zeta_{n-2}^{(2)} & -\zeta_{n-2}^{(3)} & \cdots & -\zeta_{n-2}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Так как рассматривается участок гиперплоскости  $Pl_n^{(1)}$  и  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  в (П.1), то  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = 0$  для всех  $j = 2, \dots, n$ .

Из этого следует, что алгебраические дополнения элементов первого столбца в  $H_n$  по модулю равны между собой, и для определения модуля их величины достаточно рассмотреть одно из них, например  $H_n^{(n)}$ .

Тогда на основании (П.2) и [3] получаем

$$(П.5) \quad S(Pl_n^{(1)}) = \sqrt{n} \int \cdots \int_{-1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1} |H_n^{(n)}| dx_2 \dots dx_n = \sqrt{n} V(\mathcal{E}_{n-1}),$$

где  $V(\mathcal{E}_{n-1})$  – объем области  $\mathcal{E}_{n-1}$ .

Для завершения доказательства утверждения теоремы для  $Pl_n^{(1)}$  остается учесть результат из [3], что

$$V(\mathcal{E}_n) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^n \frac{\{(k-1)!\}^2}{(2k-1)!}.$$

Утверждение теоремы для  $Pl_n^{(-1)}$  доказывается аналогично.

Теорема 1 доказана.

*Доказательство теоремы 2.* Доказательство проведем по индукции.

Пусть  $n = 3$ . Поверхность  $Surf_3$  параметризована в (4). Найдем ее площадь  $S(Surf_3)$ .

$$S(Surf_3) = \iint_{\substack{-1 \leq t \leq 1 \\ -1 \leq x_3 \leq 1}} \sqrt{\left(\frac{D(\alpha_1, \alpha_2)}{D(t, x_3)}\right)^2 + \left(\frac{D(\alpha_1, \alpha_3)}{D(t, x_3)}\right)^2 + \left(\frac{D(\alpha_2, \alpha_3)}{D(t, x_3)}\right)^2} dt dx_3,$$

где

$$\begin{aligned} \frac{D(\alpha_1, \alpha_2)}{D(t, x_3)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_3} \end{vmatrix} \simeq 2(t - x_3), \\ \frac{D(\alpha_1, \alpha_3)}{D(t, x_3)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial t} & \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \simeq 2t(t - x_3), \\ \frac{D(\alpha_2, \alpha_3)}{D(t, x_3)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial t} & \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \simeq 2t^2(t - x_3). \end{aligned}$$

Знак “ $\simeq$ ” используется в смысле равенства по модулю. Это допустимо, поскольку соответствующие величины в дальнейшем возводятся в квадраты.

Таким образом,

$$(II.6) \quad S(Surf_3) = \iint_{\substack{-1 \leq t \leq 1 \\ -1 \leq x_3 \leq 1}} \|A_3\| dt dx_3,$$

где

$$(II.7) \quad \|A_3\| = 2\sqrt{1+t^2+t^4} |t-x_3|.$$

Базой индукции является (II.6) для  $S(Surf_3)$ .

Теперь для произвольного  $n$  рассмотрим поверхность  $Surf_n$ , которая параметризована так:

$$(II.8) \quad \begin{cases} \alpha_1 = 2t + \sigma_1 \\ \alpha_2 = -(t^2 + 2t\sigma_1 + \sigma_2) \\ \alpha_3 = t^2\sigma_1 + 2t\sigma_2 + \sigma_3 \\ \dots \\ \alpha_k = (-1)^{k-1}(t^2\sigma_{k-2} + 2t\sigma_{k-1} + \sigma_k) \\ \dots \\ \alpha_{n-2} = (-1)^{n-3}(t^2\sigma_{n-4} + 2t\sigma_{n-3} + \sigma_{n-2}) \\ \alpha_{n-1} = (-1)^{n-2}(t^2\sigma_{n-3} + 2t\sigma_{n-2}) \\ \alpha_n = (-1)^{n-1}t^2\sigma_{n-2}, \end{cases}$$

где  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, n-2$ , – это элементарный симметрический многочлен степени  $i$  от  $(n-2)$  переменных  $x_3, \dots, x_n$ ,  $t \in [-1, 1]$ ,  $-1 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq 1$ .

Параметризация (II.8) получена на основании формул Виета после приравнивания корней  $x_1 = x_2 = t$ . Упорядочивание параметров  $x_3, \dots, x_n$  связано с тем, что параметризация (II.8) симметрична относительно перестановок указанных параметров.

Предположим, что утверждение теоремы верно для площади  $S(Surf_n)$ . То есть предположим, что

$$(II.9) \quad S(Surf_n) = \int \dots \int_{\substack{t \in [-1, 1] \\ -1 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq 1}} \|A_n\| dt dx_3 \dots dx_n,$$

где

$$(II.10) \quad \|A_n\| = 2\sqrt{1+t^2+\dots+t^{2(n-1)}} \left( \prod_{3 \leq i \leq n} |t-x_i| \right) \left( \prod_{3 \leq i < j \leq n} |x_i-x_j| \right).$$

Отдельно можно отметить, что формулировки (II.9) и (7) эквивалентны, но в рамках доказательства теоремы формулировка (II.9) более удобна.

Теперь на основании (II.10) докажем утверждение теоремы для площади  $S(\text{Sur}f_{n+1})$ .

Введем обозначение  $y = x_{n+1}$ . Тогда поверхность  $\text{Sur}f_{n+1}$  параметризуется так:

$$(II.11) \quad \begin{cases} \alpha_1 = 2t + \sigma_1 + y \\ \alpha_2 = -(t^2 + 2t(\sigma_1 + y) + \sigma_2 + y\sigma_1) \\ \alpha_3 = t^2(\sigma_1 + y) + 2t(\sigma_2 + y\sigma_1) + \sigma_3 + y\sigma_2 \\ \alpha_4 = -(t^2(\sigma_2 + y\sigma_1) + 2t(\sigma_3 + y\sigma_2) + \sigma_4 + y\sigma_3) \\ \dots \\ \alpha_k = (-1)^{k-1}(t^2(\sigma_{k-2} + y\sigma_{k-3}) + 2t(\sigma_{k-1} + y\sigma_{k-2}) + \sigma_k + y\sigma_{k-1}) \\ \dots \\ \alpha_{n-1} = (-1)^{n-2}(t^2(\sigma_{n-3} + y\sigma_{n-4}) + 2t(\sigma_{n-2} + y\sigma_{n-3}) + y\sigma_{n-2}) \\ \alpha_n = (-1)^{n-1}(t^2(\sigma_{n-2} + y\sigma_{n-3}) + 2ty\sigma_{n-2}) \\ \alpha_{n+1} = (-1)^n t^2 y \sigma_{n-2}, \end{cases}$$

где  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, n-2$ , определены в (II.8),  $t \in [-1, 1]$ ,  $-1 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq y \leq 1$ .

Параметризация (II.11) получена на основании формул Виета после приравнивания корней  $x_1 = x_2 = t$ . Упорядочивание параметров  $x_3, \dots, x_n, y$  связано с тем, что параметризация (II.11) симметрична относительно перестановок указанных параметров.

По определению

$$(II.12) \quad S(\text{Sur}f_{n+1}) = \int_{t \in [-1, 1]} \dots \int_{-1 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq y \leq 1} \|A_{n+1}\| dt dx_3 \dots dx_n dy,$$

где  $A_{n+1}$  – определитель:

$$(II.13) \quad A_{n+1} = \begin{vmatrix} j_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \\ j_2 & \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_n} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ j_n & \frac{\partial \alpha_n}{\partial t} & \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n} & \frac{\partial \alpha_n}{\partial y} \\ j_{n+1} & \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial t} & \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial y} \end{vmatrix},$$

$\{j_1, \dots, j_{n+1}\}$  – ортонормированный базис в пространстве  $R^{n+1}$ .

Рассмотрим  $A_{n+1}$  как вектор-функцию от  $y$ :

$$(II.14) \quad A_{n+1} = G(y) = \sum_{j=1}^{n+1} j_j \times g_j(y) = (g_1(y), \dots, g_{n+1}(y)).$$

С учетом (П.11) можно увидеть, что  $g_j(y)$ ,  $j = 1 \dots n + 1$ , являются полиномами от  $y$  степени не выше  $n - 1$ .

Покажем, что  $G(y) = 0$  при  $y = t$  и при  $y = x_i$ ,  $i = 3, \dots, n$ .

Из (П.11) можно увидеть, что для  $k = 1, \dots, n + 1$

$$\alpha_k = (-1)^{k-1} (t^2(\sigma_{k-2} + y\sigma_{k-3}) + 2t(\sigma_{k-1} + y\sigma_{k-2}) + \sigma_k + y\sigma_{k-1}),$$

где  $\sigma_i$  определены выше для  $i = 1, \dots, n - 2$ ,  $\sigma_0 = 1$ ,  $\sigma_m = 0$  при  $m < 0$  и при  $m > n - 2$ .

Тогда

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial y} = (-1)^{k-1} (t^2 \sigma_{k-3} + 2t \sigma_{k-2} + \sigma_{k-1}),$$

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} = (-1)^{k-1} 2(t(\sigma_{k-2} + y\sigma_{k-3}) + \sigma_{k-1} + y\sigma_{k-2}),$$

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_r} = (-1)^{k-1} \left( t^2 \left( \frac{\partial \sigma_{k-2}}{\partial x_r} + y \frac{\partial \sigma_{k-3}}{\partial x_r} \right) + 2t \left( \frac{\partial \sigma_{k-1}}{\partial x_r} + y \frac{\partial \sigma_{k-2}}{\partial x_r} \right) + \frac{\partial \sigma_k}{\partial x_r} + y \frac{\partial \sigma_{k-1}}{\partial x_r} \right),$$

где  $r = n - 3, \dots, n$ .

Для  $\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_r}$  выполняется равенство

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_r} = \sigma_{i-1}^{(r)},$$

где  $\sigma_j^{(r)}$  – это элементарный симметрический многочлен степени  $j$  от  $n - 3$  переменных  $x_3, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n$ .

Тогда

$$(П.15) \quad \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_r} = (-1)^{k-1} \left( t^2 (\sigma_{k-3}^{(r)} + y\sigma_{k-4}^{(r)}) + 2t (\sigma_{k-2}^{(r)} + y\sigma_{k-3}^{(r)}) + \sigma_{k-1}^{(r)} + y\sigma_{k-2}^{(r)} \right).$$

Для  $\sigma_i$  и  $\sigma_i^{(r)}$  выполняется равенство

$$(П.16) \quad \sigma_i = \sigma_i^{(r)} + x_r \sigma_{i-1}^{(r)}.$$

Тогда на основании (П.15) и (П.16) можно увидеть, что  $\forall k = 1, \dots, n + 1$  выполняется равенство

$$\left. \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_r} \right|_{y=x_r} = (-1)^{k-1} (t^2 \sigma_{k-3} + 2t \sigma_{k-2} + \sigma_{k-1}) = \frac{\partial \alpha_k}{\partial y}.$$

Это означает, что при  $y = x_r$  столбец  $r$  равен столбцу  $n + 1$  в определителе  $A_{n+1}$  (П.13),  $r = 3, \dots, n$ .

Кроме того,

$$\left. \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} \right|_{y=t} = (-1)^{k-1} (t^2 \sigma_{k-3} + 2t \sigma_{k-2} + \sigma_{k-1}) = \frac{\partial \alpha_k}{\partial y}.$$

Это означает, что при  $y = t$  столбец 2 равен столбцу  $n + 1$  в определителе  $A_{n+1}$  (П.13).

Таким образом,

$$(П.17) \quad G(y) = K (t - y) \prod_{3 \leq i \leq n} (x_i - y),$$

где  $K$  – вектор в  $R^{n+1}$ .

Тогда

$$(П.18) \quad A_{n+1}|_{y=0} = G(0) = K t x_3 \cdots x_n,$$

где  $A_{n+1}|_{y=0}$  – определитель  $A_{n+1}$  в (П.13) при  $y = 0$ .

Определитель  $A_{n+1}|_{y=0}$  можно разложить по последней строке, учитывая, что ненулевыми останутся только первый и последний элементы строки. Тогда

$$A_{n+1}|_{y=0} = j_{n+1} B_n + A_n \left. \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial y} \right|_{y=0}$$

и

$$(П.19) \quad \|A_{n+1}|_{y=0}\| = \sqrt{(B_n)^2 + \|A_n\|^2 (t^2 x_3 \cdots x_n)^2},$$

где  $\|A_n\|$  определена в (П.10),  $B_n$  – алгебраическое дополнение элемента  $j_{n+1}$  в определителе  $A_{n+1}|_{y=0}$ .

С учетом (П.11)

$$(П.20) \quad B_n \simeq \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2t + 2\sigma_1 & 2t + \sigma_1^{(3)} & \cdots & 2t + \sigma_1^{(n)} & 2t + \sigma_1 \\ 2t\sigma_1 + 2\sigma_2 & t^2 + 2t\sigma_1^{(3)} + \sigma_2^{(3)} & \cdots & t^2 + 2t\sigma_1^{(n)} + \sigma_2^{(n)} & t^2 + 2t\sigma_1 + \sigma_2 \\ 2t\sigma_2 + 2\sigma_3 & t^2\sigma_1^{(3)} + 2t\sigma_2^{(3)} + \sigma_3^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_1^{(n)} + 2t\sigma_2^{(n)} + \sigma_3^{(n)} & t^2\sigma_1 + 2t\sigma_2 + \sigma_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2t\sigma_{n-4} + 2\sigma_{n-3} & t^2\sigma_{n-5}^{(3)} + 2t\sigma_{n-4}^{(3)} + \sigma_{n-3}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-5}^{(n)} + 2t\sigma_{n-4}^{(n)} + \sigma_{n-3}^{(n)} & t^2\sigma_{n-5} + 2t\sigma_{n-4} + \sigma_{n-3} \\ 2t\sigma_{n-3} + 2\sigma_{n-2} & t^2\sigma_{n-4}^{(3)} + 2t\sigma_{n-3}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-4}^{(n)} + 2t\sigma_{n-3}^{(n)} & t^2\sigma_{n-4} + 2t\sigma_{n-3} + \sigma_{n-2} \\ 2t\sigma_{n-2} & t^2\sigma_{n-3}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-3}^{(n)} & t^2\sigma_{n-3} + 2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}$$

Лемма 1.

$$(П.21) \quad B_n \simeq 2t x_3 \cdots x_n \left( \prod_{3 \leq i \leq n} |t - x_i| \right) \left( \prod_{3 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \right).$$

Доказательство леммы 1 приведено в конце доказательства теоремы.

Используя (П.19), (П.10) и (П.21) в лемме 1, получим

$$\begin{aligned} & \|A_{n+1}|_{y=0}\| = \\ & = 2|tx_3 \cdots x_n| \left( \prod_{3 \leq i \leq n} |t - x_i| \right) \left( \prod_{3 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \right) \sqrt{1 + t^2(1 + t^2 + \dots + t^{2(n-1)})} \end{aligned}$$

и на основании (П.18) находим

$$(П.22) \quad \|K\| = \frac{\|A_{n+1}|_{y=0}\|}{|tx_3 \cdots x_n|}.$$

Возвращая обозначение  $x_{n+1} = y$ , на основании (П.17) и (П.22) получаем

$$(П.23) \quad \|G(x_{n+1})\| = 2 \left( \prod_{3 \leq i \leq n+1} |t - x_i| \right) \left( \prod_{3 \leq i < j \leq n+1} |x_i - x_j| \right) \sqrt{1 + t^2 + \dots + t^{2n}}.$$

И на основании (П.12), (П.14) и (П.23) получаем требуемое индукционное выражение

$$(П.24) \quad \begin{aligned} & S(Surf_{n+1}) = \\ & = 2 \int_{\substack{t \in [-1, 1] \\ -1 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq 1}} \cdots \int \sqrt{1 + t^2 + \dots + t^{2n}} \left( \prod_{3 \leq i \leq n+1} |t - x_i| \right) \times \\ & \quad \times \left( \prod_{3 \leq i < j \leq n+1} |x_i - x_j| \right) dt dx_3 \dots dx_n dx_{n+1}. \end{aligned}$$

*Доказательство леммы 1.* Стандартными вычислениями можно проверить, что утверждение леммы выполняется для  $n = 3, 4$ .

$$B_3 \simeq \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2t + 2x_3 & 2t & 2t + x_3 \\ 2tx_3 & t^2 & t^2 + 2tx_3 \end{vmatrix} \simeq 2tx_3(t - x_3),$$

$$\begin{aligned} B_4 \simeq & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2t + 2(x_3 + x_4) & 2t + x_4 & 2t + x_3 & 2t + x_3 + x_4 \\ 2t(x_3 + x_4) + 2x_3x_4 & t^2 + 2tx_4 & t^2 + 2tx_3 & t^2 + 2t(x_3 + x_4) + x_3x_4 \\ 2tx_3x_4 & t^2x_4 & t^2x_3 & t^2(x_3 + x_4) + 2tx_3x_4 \end{vmatrix} \simeq \\ & \simeq 2tx_3x_4(t - x_3)(t - x_4)(x_3 - x_4). \end{aligned}$$

Докажем утверждение леммы для произвольного  $n$ .

Отдельно можно отметить, что в сжатом виде идея доказательства представлена в «II. Solution by R.J. Walker» [7], где доказывается похожее утверждение.

Первый шаг.

На основании (П.16) делаем тождественные замены в (П.20) в строках  $2, \dots, n$  в столбцах  $2, \dots, n-1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2*$$

$$* \left( \begin{array}{ccccc} 1 & & & & 1 \\ & 1 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ t + \sigma_1 & & & 2t + \sigma_1 - x_n & 2t + \sigma_1 \\ t\sigma_1 + \sigma_2 & t^2 + 2t(\sigma_1 - x_3) + \sigma_2 - x_3\sigma_1^{(3)} & \dots & t^2 + 2t(\sigma_1 - x_n) + \sigma_2 - x_n\sigma_1^{(n)} & t^2 + 2t\sigma_1 + \sigma_2 \\ t\sigma_2 + \sigma_3 & t^2(\sigma_1 - x_3) + 2t(\sigma_2 - x_3\sigma_1^{(3)}) + & \dots & t^2(\sigma_1 - x_n) + 2t(\sigma_2 - x_n\sigma_1^{(n)}) + & t^2\sigma_1 + 2t\sigma_2 + \sigma_3 \\ & + \sigma_3 - x_3\sigma_2^{(3)} & & + \sigma_3 - x_n\sigma_2^{(n)} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t\sigma_{n-3} + \sigma_{n-2} & t^2(\sigma_{n-4} - x_3\sigma_{n-5}^{(3)}) + & \dots & t^2(\sigma_{n-4} - x_n\sigma_{n-5}^{(n)}) + & t^2\sigma_{n-4} + 2t\sigma_{n-3} + \sigma_{n-2} \\ & + 2t(\sigma_{n-3} - x_3\sigma_{n-4}^{(3)}) & & + 2t(\sigma_{n-3} - x_n\sigma_{n-4}^{(n)}) & \\ t\sigma_{n-2} & t^2(\sigma_{n-3} - x_3\sigma_{n-4}^{(3)}) & \dots & t^2(\sigma_{n-3} - x_n\sigma_{n-4}^{(n)}) & t^2\sigma_{n-3} + 2t\sigma_{n-2} \end{array} \right)$$

Из строк  $j = 2, \dots, n-1$  вычитаем первую строку, умноженную на последний элемент  $j$ -й строки  $b_{j,n}$ . Из строки  $n$  вычитаем первую строку, умноженную на  $t^2\sigma_{n-3}$ . Умножаем строки  $j = 2, \dots, n$  на  $-1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2*$$

$$* \left( \begin{array}{ccccc} 1 & & & & 1 \\ & 1 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ t & & & x_n & 0 \\ t^2 + t\sigma_1 & & & 2tx_n + x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_1 + t\sigma_2 & t^2x_3 + 2tx_3\sigma_1^{(3)} + x_3\sigma_2^{(3)} & \dots & t^2x_n + 2tx_n\sigma_1^{(n)} + x_n\sigma_2^{(n)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^2\sigma_{n-5} + t\sigma_{n-4} & t^2x_3\sigma_{n-6}^{(3)} + 2tx_3\sigma_{n-5}^{(3)} + x_3\sigma_{n-4}^{(3)} & \dots & t^2x_n\sigma_{n-6}^{(n)} + 2tx_n\sigma_{n-5}^{(n)} + x_n\sigma_{n-4}^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_{n-4} + t\sigma_{n-3} & t^2x_3\sigma_{n-5}^{(3)} + 2tx_3\sigma_{n-4}^{(3)} + \sigma_{n-2} & \dots & t^2x_n\sigma_{n-5}^{(n)} + 2tx_n\sigma_{n-4}^{(n)} + \sigma_{n-2} & 0 \\ t^2\sigma_{n-3} - t\sigma_{n-2} & t^2x_3\sigma_{n-4}^{(3)} & \dots & t^2x_n\sigma_{n-4}^{(n)} & -2t\sigma_{n-2} \end{array} \right)$$

В строке  $n-1$  в столбцах  $j = 2, \dots, n-1$  делаем замену обозначения  $\sigma_{n-2} = x_{j+1}\sigma_{n-3}^{(j+1)}$ . Получаем

$$B_n \simeq 2*$$

$$* \left( \begin{array}{ccccc} 1 & & & & 1 \\ & 1 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ t & & & x_n & 0 \\ t^2 + t\sigma_1 & & & 2tx_n + x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_1 + t\sigma_2 & t^2x_3 + 2tx_3\sigma_1^{(3)} + x_3\sigma_2^{(3)} & \dots & t^2x_n + 2tx_n\sigma_1^{(n)} + x_n\sigma_2^{(n)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^2\sigma_{n-5} + t\sigma_{n-4} & t^2x_3\sigma_{n-6}^{(3)} + 2tx_3\sigma_{n-5}^{(3)} + x_3\sigma_{n-4}^{(3)} & \dots & t^2x_n\sigma_{n-6}^{(n)} + 2tx_n\sigma_{n-5}^{(n)} + x_n\sigma_{n-4}^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_{n-4} + t\sigma_{n-3} & t^2x_3\sigma_{n-5}^{(3)} + 2tx_3\sigma_{n-4}^{(3)} + x_3\sigma_{n-3}^{(3)} & \dots & t^2x_n\sigma_{n-5}^{(n)} + 2tx_n\sigma_{n-4}^{(n)} + x_n\sigma_{n-3}^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_{n-3} - t\sigma_{n-2} & t^2x_3\sigma_{n-4}^{(3)} & \dots & t^2x_n\sigma_{n-4}^{(n)} & -2t\sigma_{n-2} \end{array} \right)$$

Из первого столбца выносим множитель  $t$ , из столбцов  $j = 2, \dots, n-1$  выносим множители  $x_{j+1}$ . Получаем

$$B_n \simeq 2tx_3 \cdots x_n^*$$

$$* \begin{vmatrix} t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t + \sigma_1 & 2t + \sigma_1^{(3)} & \cdots & 2t + \sigma_1^{(n)} & 0 \\ t\sigma_1 + \sigma_2 & t^2 + 2t\sigma_1^{(3)} + \sigma_2^{(3)} & \cdots & t^2 + 2t\sigma_1^{(n)} + \sigma_2^{(n)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t\sigma_{n-5} + \sigma_{n-4} & t^2\sigma_{n-6}^{(3)} + 2t\sigma_{n-5}^{(3)} + \sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-6}^{(n)} + 2t\sigma_{n-5}^{(n)} + \sigma_{n-4}^{(n)} & 0 \\ t\sigma_{n-4} + \sigma_{n-3} & t^2\sigma_{n-5}^{(3)} + 2t\sigma_{n-4}^{(3)} + \sigma_{n-3}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-5}^{(n)} + 2t\sigma_{n-4}^{(n)} + \sigma_{n-3}^{(n)} & 0 \\ t\sigma_{n-3} - \sigma_{n-2} & t^2\sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-4}^{(n)} & (-1)^1 2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Второй шаг.

На основании (П.16) делаем тождественные замены в строках  $3, \dots, n$  в столбцах  $2, \dots, n-1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2tx_3 \cdots x_n^*$$

$$* \begin{vmatrix} t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t + \sigma_1 & 2t + \sigma_1 - x_3 & \cdots & 2t + \sigma_1 - x_n & 0 \\ t\sigma_1 + \sigma_2 & t^2 + 2t(\sigma_1 - x_3) + \sigma_2 - x_3\sigma_1^{(3)} & \cdots & t^2 + 2t(\sigma_1 - x_n) + \sigma_2 - x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t\sigma_{n-5} + \sigma_{n-4} & t^2(\sigma_{n-6} - x_3\sigma_{n-7}^{(3)}) + \\ & + 2t(\sigma_{n-5} - x_3\sigma_{n-6}^{(3)}) + & \cdots & + 2t(\sigma_{n-6} - x_n\sigma_{n-7}^{(n)}) + \\ & + \sigma_{n-4} - x_3\sigma_{n-5}^{(3)} & & + \sigma_{n-4} - x_n\sigma_{n-5}^{(n)} & 0 \\ t\sigma_{n-4} + \sigma_{n-3} & t^2(\sigma_{n-5} - x_3\sigma_{n-6}^{(3)}) + \\ & + 2t(\sigma_{n-4} - x_3\sigma_{n-5}^{(3)}) + & \cdots & + 2t(\sigma_{n-5} - x_n\sigma_{n-6}^{(n)}) + \\ & + \sigma_{n-3} - x_3\sigma_{n-4}^{(3)} & & + \sigma_{n-3} - x_n\sigma_{n-4}^{(n)} & 0 \\ t\sigma_{n-3} - \sigma_{n-2} & t^2(\sigma_{n-4} - x_3\sigma_{n-5}^{(3)}) & \cdots & t^2(\sigma_{n-4} - x_n\sigma_{n-5}^{(n)}) & -2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из строки 3 вычитаем строку 2, умноженную на  $2t + \sigma_1$ . Из строки 4 вычитаем строку 2, умноженную на  $t^2 + 2t\sigma_1 + \sigma_2$ . Из строк  $j = 5, \dots, n-1$  вычитаем строку 2, умноженную на  $t^2\sigma_{j-4} + 2t\sigma_{j-3} + \sigma_{j-2}$ . Из строки  $n$  вычитаем строку 2, умноженную на  $t^2\sigma_{n-4} - \sigma_{n-2}$ . Умножаем строки  $j = 3, \dots, n$  на  $-1$ .

Получаем

$$B_n \simeq 2tx_3 \cdots x_n^*$$

$$* \left| \begin{array}{cccccc} t^{-1} & & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 1 \\ 1 & & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t & & x_3 & \cdots & x_n & 0 \\ t^2 + t\sigma_1 & & 2tx_3 + x_3\sigma_1^{(3)} & \cdots & 2tx_n + x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^2\sigma_{n-6} + t\sigma_{n-5} & t^2x_3\sigma_{n-7}^{(3)} + 2tx_3\sigma_{n-6}^{(3)} + x_3\sigma_{n-5}^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-7}^{(n)} + 2tx_n\sigma_{n-6}^{(n)} + x_n\sigma_{n-5}^{(n)} & & 0 \\ t^2\sigma_{n-5} + t\sigma_{n-4} & t^2x_3\sigma_{n-6}^{(3)} + 2tx_3\sigma_{n-5}^{(3)} + x_3\sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-6}^{(n)} + 2tx_n\sigma_{n-5}^{(n)} + x_n\sigma_{n-4}^{(n)} & & 0 \\ t^2\sigma_{n-4} - t\sigma_{n-3} & t^2x_3\sigma_{n-5}^{(3)} - \sigma_{n-2} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-5}^{(n)} - \sigma_{n-2} & & 2t\sigma_{n-2} \end{array} \right|$$

В строке  $n$  в столбцах  $j = 2, \dots, n-1$  делаем замену обозначения  $\sigma_{n-2} = x_{j+1}\sigma_{n-3}^{(j+1)}$ . Получаем

$$B_n \simeq 2tx_3 \cdots x_n^*$$

$$* \left| \begin{array}{cccccc} t^{-1} & & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 1 \\ 1 & & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t & & x_3 & \cdots & x_n & 0 \\ t^2 + t\sigma_1 & & 2tx_3 + x_3\sigma_1^{(3)} & \cdots & 2tx_n + x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^2\sigma_{n-6} + t\sigma_{n-5} & t^2x_3\sigma_{n-7}^{(3)} + 2tx_3\sigma_{n-6}^{(3)} + x_3\sigma_{n-5}^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-7}^{(n)} + 2tx_n\sigma_{n-6}^{(n)} + x_n\sigma_{n-5}^{(n)} & & 0 \\ t^2\sigma_{n-5} + t\sigma_{n-4} & t^2x_3\sigma_{n-6}^{(3)} + 2tx_3\sigma_{n-5}^{(3)} + x_3\sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-6}^{(n)} + 2tx_n\sigma_{n-5}^{(n)} + x_n\sigma_{n-4}^{(n)} & & 0 \\ t^2\sigma_{n-4} - t\sigma_{n-3} & t^2x_3\sigma_{n-5}^{(3)} - x_3\sigma_{n-3}^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-5}^{(n)} - x_n\sigma_{n-3}^{(n)} & & 2t\sigma_{n-2} \end{array} \right|$$

Из первого столбца выносим множитель  $t$ , из столбцов  $j = 2, \dots, n-1$  выносим множители  $x_{j+1}$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^2x_3^2 \cdots x_n^2^*$$

$$* \left| \begin{array}{cccccc} t^{-2} & & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 1 \\ t^{-1} & & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t + \sigma_1 & & 2t + \sigma_1^{(3)} & \cdots & 2t + \sigma_1^{(n)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t\sigma_{n-6} + \sigma_{n-5} & t^2\sigma_{n-7}^{(3)} + 2t\sigma_{n-6}^{(3)} + \sigma_{n-5}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-7}^{(n)} + 2t\sigma_{n-6}^{(n)} + \sigma_{n-5}^{(n)} & & 0 \\ t\sigma_{n-5} + \sigma_{n-4} & t^2\sigma_{n-6}^{(3)} + 2t\sigma_{n-5}^{(3)} + \sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-6}^{(n)} + 2t\sigma_{n-5}^{(n)} + \sigma_{n-4}^{(n)} & & 0 \\ t\sigma_{n-4} - \sigma_{n-3} & t^2\sigma_{n-5}^{(3)} - \sigma_{n-3}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-5}^{(n)} - \sigma_{n-3}^{(n)} & & (-1)^2 2t\sigma_{n-2} \end{array} \right|$$

Третий шаг.

На основании (П.16) делаем тождественные замены в строках  $4, \dots, n$  в столбцах  $2, \dots, n-1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^2 x_3^2 \cdots x_n^2 *$$

$$\begin{array}{ccccc|c}
 t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 1 \\
 t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\
 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\
 t + \sigma_1 & 2t + \sigma_1 - x_3 & \cdots & 2t + \sigma_1 - x_n & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 t\sigma_{n-6} + \sigma_{n-5} & t^2(\sigma_{n-7} - x_3\sigma_{n-8}) + \\ & + 2t(\sigma_{n-6} - x_3\sigma_{n-7}) + \\ & + \sigma_{n-5} - x_3\sigma_{n-6} & \cdots & t^2(\sigma_{n-7} - x_n\sigma_{n-8}) + \\ & + 2t(\sigma_{n-6} - x_n\sigma_{n-7}) + \\ & + \sigma_{n-5} - x_n\sigma_{n-6} & & 0 \\
 t\sigma_{n-5} + \sigma_{n-4} & t^2(\sigma_{n-6} - x_3\sigma_{n-7}) + \\ & + 2t(\sigma_{n-5} - x_3\sigma_{n-6}) + \\ & + \sigma_{n-4} - x_3\sigma_{n-5} & \cdots & t^2(\sigma_{n-6} - x_n\sigma_{n-7}) + \\ & + 2t(\sigma_{n-5} - x_n\sigma_{n-6}) + \\ & + \sigma_{n-4} - x_n\sigma_{n-5} & & 0 \\
 t\sigma_{n-4} - \sigma_{n-3} & t^2(\sigma_{n-5} - x_3\sigma_{n-6}) - \\ & - (\sigma_{n-3} - x_3\sigma_{n-4}) & \cdots & t^2(\sigma_{n-5} - x_n\sigma_{n-6}) - \\ & - (\sigma_{n-3} - x_n\sigma_{n-4}) & & 2t\sigma_{n-2}
 \end{array}$$

Из строки 4 вычитаем строку 3, умноженную на  $2t + \sigma_1$ . Из строки 5 вычитаем строку 3, умноженную на  $t^2 + 2t\sigma_1 + \sigma_2$ . Из строк  $j = 6, \dots, n-1$  вычитаем строку 3, умноженную на  $t^2\sigma_{j-5} + 2t\sigma_{j-4} + \sigma_{j-3}$ . Из строки  $n$  вычитаем строку 3, умноженную на  $t^2\sigma_{n-5} - \sigma_{n-3}$ . Умножаем строки  $j = 4, \dots, n$  на  $-1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^2 x_3^2 \cdots x_n^2 *$$

$$\begin{array}{ccccc|c}
 t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 1 \\
 t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\
 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\
 t & x_3 & \cdots & x_n & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 t^2\sigma_{n-7} + t\sigma_{n-6} & t^2 x_3\sigma_{n-8} + 2tx_3\sigma_{n-7} + x_3\sigma_{n-6} & \cdots & t^2 x_n\sigma_{n-8} + 2tx_n\sigma_{n-7} + x_n\sigma_{n-6} & 0 \\
 t^2\sigma_{n-6} + t\sigma_{n-5} & t^2 x_3\sigma_{n-7} + 2tx_3\sigma_{n-6} + x_3\sigma_{n-5} & \cdots & t^2 x_n\sigma_{n-7} + 2tx_n\sigma_{n-6} + x_n\sigma_{n-5} & 0 \\
 t^2\sigma_{n-5} - t\sigma_{n-4} & t^2 x_3\sigma_{n-6} - x_3\sigma_{n-4} & \cdots & t^2 x_n\sigma_{n-6} - x_n\sigma_{n-4} & -2t\sigma_{n-2}
 \end{array}$$

Из первого столбца выносим множитель  $t$ , из столбцов  $j = 2, \dots, n - 1$  выносим множители  $x_{j+1}$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^3 x_3^3 \cdots x_n^3 *$$

$$* \left( \begin{array}{cccc|c} t^{-3} & x_3^{-3} & \cdots & x_n^{-3} & 1 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t\sigma_{n-7} + \sigma_{n-6} & t^2\sigma_{n-8}^{(3)} + 2t\sigma_{n-7}^{(3)} + \sigma_{n-6}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-8}^{(n)} + 2t\sigma_{n-7}^{(n)} + \sigma_{n-6}^{(n)} & 0 \\ t\sigma_{n-6} + \sigma_{n-5} & t^2\sigma_{n-7}^{(3)} + 2t\sigma_{n-6}^{(3)} + \sigma_{n-5}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-7}^{(n)} + 2t\sigma_{n-6}^{(n)} + \sigma_{n-5}^{(n)} & 0 \\ t\sigma_{n-5} - \sigma_{n-4} & t^2\sigma_{n-6}^{(3)} - \sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-6}^{(n)} - \sigma_{n-4}^{(n)} & (-1)^3 2t\sigma_{n-2} \end{array} \right).$$

На этом закончен третий шаг.

Далее по аналогии с шагом 3 выполняем шаги  $4, \dots, n - 5$ .

После шага  $n - 5$

$$B_n \simeq 2t^{n-5} x_3^{n-5} \cdots x_n^{n-5} *$$

$$* \left( \begin{array}{cccc|c} t^{-n+5} & x_3^{-n+5} & \cdots & x_n^{-n+5} & 1 \\ t^{-n+6} & x_3^{-n+6} & \cdots & x_n^{-n+6} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t + \sigma_1 & 2t + \sigma_1^{(3)} & \cdots & 2t + \sigma_1^{(n)} & 0 \\ t\sigma_1 + \sigma_2 & t^2 + 2t\sigma_1^{(3)} + \sigma_2^{(3)} & \cdots & t^2 + 2t\sigma_1^{(n)} + \sigma_2^{(n)} & 0 \\ t\sigma_2 + \sigma_3 & t^2\sigma_1^{(3)} + 2t\sigma_2^{(3)} + \sigma_3^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_1^{(n)} + 2t\sigma_2^{(n)} + \sigma_3^{(n)} & 0 \\ t\sigma_3 - \sigma_4 & t^2\sigma_2^{(3)} - \sigma_4^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_2^{(n)} - \sigma_4^{(n)} & (-1)^{n-5} 2t\sigma_{n-2} \end{array} \right).$$

$(n - 4)$ -й шаг.

На основании (П.16) делаем тождественные замены в строках  $(n - 3), \dots, n$  в столбцах  $2, \dots, n - 1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-5}x_3^{n-5} \dots x_n^{n-5} *$$

$$* \left( \begin{array}{cccccc} t^{-n+5} & x_3^{-n+5} & \dots & x_n^{-n+5} & 1 \\ t^{-n+6} & x_3^{-n+6} & \dots & x_n^{-n+6} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \dots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ t + \sigma_1 & 2t + \sigma_1 - x_3 & \dots & 2t + \sigma_1 - x_n & 0 \\ t\sigma_1 + \sigma_2 & t^2 + 2t(\sigma_1 - x_3) + \\ & + \sigma_2 - x_3\sigma_1^{(3)} & \dots & t^2 + 2t(\sigma_1 - x_n) + \sigma_2 - x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ t\sigma_2 + \sigma_3 & t^2(\sigma_1 - x_3) + \\ & + 2t(\sigma_2 - x_3\sigma_1^{(3)}) + \dots & & t^2(\sigma_1 - x_n) + \\ & + \sigma_3 - x_3\sigma_2^3 & & + 2t(\sigma_2 - x_n\sigma_1^{(n)}) + \\ & & & + \sigma_3 - x_n\sigma_2^{(n)} & 0 \\ t\sigma_3 - \sigma_4 & t^2(\sigma_2 - x_3\sigma_1^{(3)}) - \\ & - (\sigma_4 - x_3\sigma_3^{(3)}) & \dots & t^2(\sigma_2 - x_n\sigma_1^{(n)}) - \\ & & & - (\sigma_4 - x_n\sigma_3^{(n)}) & (-1)^{n-5}2t\sigma_{n-2} \end{array} \right) .$$

Из строки  $n - 3$  вычитаем строку  $n - 4$ , умноженную на  $2t + \sigma_1$ . Из строки  $n - 2$  вычитаем строку  $n - 4$ , умноженную на  $t^2 + 2t\sigma_1 + \sigma_2$ . Из строки  $n - 1$  вычитаем строку  $n - 4$ , умноженную на  $t^2\sigma_1 + 2t\sigma_2 + \sigma_3$ . Из строки  $n$  вычитаем строку  $n - 4$ , умноженную на  $t^2\sigma_2 - \sigma_4$ . Умножаем строки  $j = n - 3, \dots, n$  на  $-1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-5}x_3^{n-5} \dots x_n^{n-5} *$$

$$* \left( \begin{array}{cccccc} t^{-n+5} & x_3^{-n+5} & \dots & x_n^{-n+5} & 1 \\ t^{-n+6} & x_3^{-n+6} & \dots & x_n^{-n+6} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \dots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ t & x_3 & \dots & x_n & 0 \\ t^2 + t\sigma_1 & 2tx_3 + x_3\sigma_1^{(3)} & \dots & 2tx_n + x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_1 + t\sigma_2 & t^2x_3 + 2tx_3\sigma_1^{(3)} + x_3\sigma_2^3 & \dots & t^2x_n + 2tx_n\sigma_1^{(n)} + x_n\sigma_2^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_2 - t\sigma_3 & t^2x_3\sigma_1^{(3)} - x_3\sigma_3^{(3)} & \dots & t^2x_n\sigma_1^{(n)} - x_n\sigma_3^{(n)} & (-1)^{n-4}2t\sigma_{n-2} \end{array} \right) .$$

Из первого столбца выносим множитель  $t$ , из столбцов  $j = 2, \dots, n - 1$  выносим множители  $x_{j+1}$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-4}x_3^{n-4} \dots x_n^{n-4} *$$

$$* \left( \begin{array}{cccc|c} t^{-n+4} & x_3^{-n+4} & \dots & x_n^{-n+4} & 1 \\ t^{-n+5} & x_3^{-n+5} & \dots & x_n^{-n+5} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \dots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \dots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ t + \sigma_1 & 2t + \sigma_1^{(3)} & \dots & 2t + \sigma_1^{(n)} & 0 \\ t\sigma_1 + \sigma_2 & t^2 + 2t\sigma_1^{(3)} + \sigma_2^{(3)} & \dots & t^2 + 2t\sigma_1^{(n)} + \sigma_2^{(n)} & 0 \\ t\sigma_2 - \sigma_3 & t^2\sigma_1^{(3)} - \sigma_3^{(3)} & \dots & t^2\sigma_1^{(n)} - \sigma_3^{(n)} & (-1)^{n-4}2t\sigma_{n-2} \end{array} \right).$$

$(n - 3)$ -й шаг.

На основании (П.16) делаем тождественные замены в строках  $(n - 2), \dots, n$  в столбцах  $2, \dots, n - 1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-4}x_3^{n-4} \dots x_n^{n-4} *$$

$$* \left( \begin{array}{cccc|c} t^{-n+4} & x_3^{-n+4} & \dots & x_n^{-n+4} & 1 \\ t^{-n+5} & x_3^{-n+5} & \dots & x_n^{-n+5} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \dots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \dots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ t + \sigma_1 & 2t + \sigma_1 - x_3 & \dots & 2t + \sigma_1 - x_n & 0 \\ t\sigma_1 + \sigma_2 & t^2 + 2t(\sigma_1 - x_3) + \sigma_2 - x_3\sigma_1^{(3)} & \dots & t^2 + 2t(\sigma_1 - x_n) + \sigma_2 - x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ t\sigma_2 - \sigma_3 & t^2(\sigma_1 - x_3) - (\sigma_3 - x_3\sigma_2^{(3)}) & \dots & t^2(\sigma_1 - x_n) - (\sigma_3 - x_n\sigma_2^{(n)}) & (-1)^{n-4}2t\sigma_{n-2} \end{array} \right).$$

Из строки  $n - 2$  вычитаем строку  $n - 3$ , умноженную на  $2t + \sigma_1$ . Из строки  $n - 1$  вычитаем строку  $n - 3$ , умноженную на  $t^2 + 2t\sigma_1 + \sigma_2$ . Из строки  $n$  вычитаем строку  $n - 3$ , умноженную на  $t^2\sigma_1 - \sigma_3$ . Умножаем строки  $j =$

$= n - 2, n - 1, n$  на  $-1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-4}x_3^{n-4} \dots x_n^{n-4} * \begin{vmatrix} t^{-n+4} & x_3^{-n+4} & \dots & x_n^{-n+4} & 1 \\ t^{-n+5} & x_3^{-n+5} & \dots & x_n^{-n+5} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \dots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \dots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ t & x_3 & \dots & x_n & 0 \\ t^2 + t\sigma_1 & 2tx_3 + x_3\sigma_1^{(3)} & \dots & 2tx_n + x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_1 - t\sigma_2 & t^2x_3 - x_3\sigma_2^{(3)} & \dots & t^2x_n - x_n\sigma_2^{(n)} & (-1)^{n-3}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из первого столбца выносим множитель  $t$ , из столбцов  $j = 2, \dots, n - 1$  выносим множители  $x_{j+1}$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-3}x_3^{n-3} \dots x_n^{n-3} \begin{vmatrix} t^{-n+3} & x_3^{-n+3} & \dots & x_n^{-n+3} & 1 \\ t^{-n+4} & x_3^{-n+4} & \dots & x_n^{-n+4} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-3} & x_3^{-3} & \dots & x_n^{-3} & 0 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \dots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \dots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ t + \sigma_1 & 2t + \sigma_1^{(3)} & \dots & 2t + \sigma_1^{(n)} & 0 \\ t\sigma_1 - \sigma_2 & t^2 - \sigma_2^{(3)} & \dots & t^2 - \sigma_2^{(n)} & (-1)^{n-3}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

$(n - 2)$ -й шаг.

На основании (П.16) делаем тождественные замены в строках  $n - 1, n$  в столбцах  $2, \dots, n - 1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-3}x_3^{n-3} \dots x_n^{n-3} * \begin{vmatrix} t^{-n+3} & x_3^{-n+3} & \dots & x_n^{-n+3} & 1 \\ t^{-n+4} & x_3^{-n+4} & \dots & x_n^{-n+4} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-3} & x_3^{-3} & \dots & x_n^{-3} & 0 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \dots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \dots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ t + \sigma_1 & 2t + \sigma_1 - x_3 & \dots & 2t + \sigma_1 - x_n & 0 \\ t\sigma_1 - \sigma_2 & t^2 - (\sigma_2 - x_3\sigma_1^{(3)}) & \dots & t^2 - (\sigma_2 - x_n\sigma_1^{(n)}) & (-1)^{n-3}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из строки  $n-1$  вычитаем строку  $n-2$ , умноженную на  $2t+\sigma_1$ . Из строки  $n$  вычитаем строку  $n-2$ , умноженную на  $t^2-\sigma_2$ . Умножаем строки  $j=n-1, n$  на  $-1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-3}x_3^{n-3} \dots x_n^{n-3} \begin{vmatrix} t^{-n+3} & x_3^{-n+3} & \dots & x_n^{-n+3} & 1 \\ t^{-n+4} & x_3^{-n+4} & \dots & x_n^{-n+4} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-3} & x_3^{-3} & \dots & x_n^{-3} & 0 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \dots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \dots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ t & x_3 & \dots & x_n & 0 \\ t^2 - t\sigma_1 & -x_3\sigma_1^{(3)} & \dots & -x_n\sigma_1^{(n)} & (-1)^{n-2}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из первого столбца выносим множитель  $t$ , из столбцов  $j=2, \dots, n-1$  выносим множители  $x_{j+1}$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-2}x_3^{n-2} \dots x_n^{n-2} \begin{vmatrix} t^{-n+2} & x_3^{-n+2} & \dots & x_n^{-n+2} & 1 \\ t^{-n+3} & x_3^{-n+3} & \dots & x_n^{-n+3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-4} & x_3^{-4} & \dots & x_n^{-4} & 0 \\ t^{-3} & x_3^{-3} & \dots & x_n^{-3} & 0 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \dots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \dots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ t - \sigma_1 & -\sigma_1^{(3)} & \dots & -\sigma_1^{(n)} & (-1)^{n-2}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

$(n-1)$ -й шаг.

На основании (П.16) делаем тождественные замены в последней строке в столбцах  $2, \dots, n-1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-2}x_3^{n-2} \dots x_n^{n-2} \begin{vmatrix} t^{-n+2} & x_3^{-n+2} & \dots & x_n^{-n+2} & 1 \\ t^{-n+3} & x_3^{-n+3} & \dots & x_n^{-n+3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-4} & x_3^{-4} & \dots & x_n^{-4} & 0 \\ t^{-3} & x_3^{-3} & \dots & x_n^{-3} & 0 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \dots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \dots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ t - \sigma_1 & x_3 - \sigma_1 & \dots & x_n - \sigma_1 & (-1)^{n-2}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из строки  $n$  вычитаем строку  $n - 1$ , умноженную на  $-\sigma_1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-2}x_3^{n-2} \cdots x_n^{n-2} \begin{vmatrix} t^{-n+2} & x_3^{-n+2} & \cdots & x_n^{-n+2} & 1 \\ t^{-n+3} & x_3^{-n+3} & \cdots & x_n^{-n+3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-4} & x_3^{-4} & \cdots & x_n^{-4} & 0 \\ t^{-3} & x_3^{-3} & \cdots & x_n^{-3} & 0 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t & x_3 & \cdots & x_n & (-1)^{n-2}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из первого столбца выносим множитель  $t$ , из столбцов  $j = 2, \dots, n - 1$  выносим множители  $x_{j+1}$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-1}x_3^{n-1} \cdots x_n^{n-1} \begin{vmatrix} t^{-n+1} & x_3^{-n+1} & \cdots & x_n^{-n+1} & 1 \\ t^{-n+2} & x_3^{-n+2} & \cdots & x_n^{-n+2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-5} & x_3^{-5} & \cdots & x_n^{-5} & 0 \\ t^{-4} & x_3^{-4} & \cdots & x_n^{-4} & 0 \\ t^{-3} & x_3^{-3} & \cdots & x_n^{-3} & 0 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & (-1)^{n-2}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

На этом закончен шаг  $(n - 1)$ , после которого возвращаем вынесенные множители в соответствующие столбцы определителя и получаем

$$(II.25) \quad B_n \simeq 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ t & x_3 & \cdots & x_n & 0 \\ t^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & 0 \\ t^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & (-1)^{n-2}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

После разложения определителя (II.25) по последнему столбцу, получаем

$$(II.26) \quad B_n \simeq 2 \left( (-1)^{n+1}tx_3 \cdots x_n V(t, x_3, \dots, x_n) + (-1)^{2n}(-1)^{n-2}2tx_3 \cdots x_n V(t, x_3, \dots, x_n) \right),$$

где  $V(t, x_3, \dots, x_n)$  – определитель Вандермонда от переменных  $t, x_3, \dots, x_n$ .

Учитывая разную четность степеней  $-1$  в (II.26), получаем

$$B_n \simeq 2tx_3 \cdots x_n V(t, x_3, \dots, x_n).$$

Лемма 1 и теорема 2 доказаны.

*Доказательство теоремы 3.* В [2] показано, что

$$\log_2 V(D_n) = -\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right) \log_2 n + O(n).$$

Следовательно,

$$\ln V(D_n) = -\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right) \ln n + O(n).$$

В [3] показано, что

$$\ln \left( \frac{V(\mathcal{E}_n)}{V(D_n)} \right) = -\frac{\ln 2}{2} n^2 + \frac{1}{8} \ln n + O(1)$$

и

$$(II.27) \quad \begin{aligned} V(\mathcal{E}_n) &= \int \cdots \int_{-1 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1} \left( \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \right) dx_1 \dots dx_n = \\ &= 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^n \frac{\{(k-1)!\}^2}{(2k-1)!}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(II.28) \quad \ln V(\mathcal{E}_n) = -\frac{\ln 2}{2} n^2 - \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{8}\right) \ln n + O(n).$$

На основании (II.5) из доказательства теоремы 1 имеем

$$S(Pl_n^{(1)}) = S(Pl_n^{(-1)}) = \sqrt{n} V(\mathcal{E}_{n-1}).$$

На основании (7) в теореме 2 и (II.27) можно увидеть, что

$$\begin{aligned} &S(Surf_n) = \\ &= 2 \int \cdots \int_{\substack{x_1 \in [-1,1] \\ -1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq 1}} \sqrt{1 + x_1^2 + \dots + x_1^{2(n-1)}} \left( \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} |x_i - x_j| \right) dx_1 \dots dx_{n-1} \leq \\ &\leq 2\sqrt{n} \int \cdots \int_{\substack{x_1 \in [-1,1] \\ -1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq 1}} \left( \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} |x_i - x_j| \right) dx_1 \dots dx_{n-1} = 2\sqrt{n}(n-1)V(\mathcal{E}_{n-1}). \end{aligned}$$

Таким образом, на основании (8) получаем

$$(II.29) \quad S(\partial \mathcal{E}_n) \leq 2\sqrt{n} n V(\mathcal{E}_{n-1}).$$

На основании (П.28) и (П.29) получаем

$$\ln S(\partial\mathcal{E}_n) \leq -\frac{\ln 2}{2}n^2 - \frac{n}{2}\ln n + O(n).$$

Так как при значительно больших значениях  $n$  величина  $(-\frac{\ln 2}{2}n^2 - \frac{n}{2}\ln n)$  доминирует над значением  $O(n)$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln S(\partial\mathcal{E}_n) = -\infty$ , откуда следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(\partial\mathcal{E}_n) = 0$ .

На этом закончено доказательство первой части теоремы 3.

Теперь докажем вторую часть теоремы 3 о том, что максимальное значение  $S(\partial\mathcal{E}_n)$  достигается при  $n = 3$ .

Из (П.27) следует, что

$$V(\mathcal{E}_n) = V(\mathcal{E}_{n-1}) 2^n \frac{\{(n-1)!\}^2}{(2n-1)!}, \quad n \geq 2,$$

$$V(\mathcal{E}_1) = 2.$$

Тогда, с учетом (П.29), получаем, что

$$(П.30) \quad S(\partial\mathcal{E}_n) \leq F(n), \quad n \geq 2,$$

где

$$F(1) = 2,$$

$$F(n) = F(n-1) \times k(n), \quad n \geq 2,$$

$$k(n) = 2^{n-1} \frac{n\sqrt{n}}{(n-1)\sqrt{n-1}} \frac{\{(n-2)!\}^2}{(2n-3)!}.$$

Покажем, что  $k(n) < 1$  при  $n \geq 4$ .

$$(П.31) \quad k(n) = 2^{n-1} \frac{n\sqrt{n}}{(n-1)\sqrt{n-1}} \frac{1 \times 2 \cdots (n-2)}{(n-1) \times n \cdots (2n-3)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{n}}{(n-1)\sqrt{n-1}} \times \frac{2 \times 1}{n-1} \times \frac{2 \times 2}{n+1} \times \frac{2 \times 3}{n+2} \cdots \frac{2 \times (n-2)}{2n-3}.$$

В (П.31) всего  $(n-1)$  сомножителей, и все из них меньше 1 при  $n \geq n_0 = 4$ .

Это означает, что  $k(n) < 1$  и  $F(n)$  в (П.30) является убывающей функцией при  $n \geq 4$ . Следовательно, при  $n \geq 4$

$$S(\partial\mathcal{E}_n) \leq F(n) \leq F(4) = 2\sqrt{4} \times 4 \times V(\mathcal{E}_3) \approx 5,689.$$

С учетом (5) вторая часть теоремы 3 доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dzhafarov V., Büyükköroğlu T., Akyar H.* Stability Region for Discrete Time Systems and Its Boundary // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. 2021. V. 27. No. 3. P. 246–255.
2. *Fam A.T.* The volume of the coefficient space stability domain of monic polynomials // IEEE International Symposium on Circuits and Systems. 1989. P. 1780–1783.
3. *Akiyama S., Pethő A.* On the distribution of polynomials with bounded roots, I. Polynomials with real coefficients // J. Math. Soc. Japan. 2014. V. 66. No. 3. P. 927–949.
4. *Fam A.T., Meditch J.S.* A canonical parameter space for linear systems design // IEEE Transact. Autom. Control. 1978. V. 23. No. 3. P. 454–458.
5. *Zellner A.* An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics. N.Y.: John Wiley & Sons, 1996.
6. *Farebrother R.W.* Simplified Samuelson Conditions for Cubic and Quartic Equations // Manchester School Econom. Soc. Studies. 1973. V. 41. No. 4. P. 396–406.
7. *Wedderburn J.H.M., Smiley M.F., Walker R.J.* Jacobian, Alternant // Amer. Math. Monthly. 1942. V. 49. No. 10. P. 694–696. <https://www.jstor.org/stable/2302597>

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Маликовым.*

Поступила в редакцию 07.02.2024

После доработки 11.11.2024

Принята к публикации 25.11.2024

© 2025 г. М.Е. ШАЙКИН, канд. техн. наук (shaykin@ipu.ru)  
 (Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## ЗАДАЧИ $H^2/H_\infty$ -ТЕОРИИ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ТИПА

Рассматриваются задачи теории  $H^2/H_\infty$ -управления для динамических объектов, заданных линейными стохастическими уравнениями Ито, коэффициенты сноса и диффузии которых линейно зависят от вектора состояния, сигнала управления и внешнего возмущения. Выход регулируемого объекта задан двумя выходными сигналами, регулируемым  $z$  и наблюдаемым (в шумах)  $y$ . Регулятор оптимизируется по квадратическому  $H^2$ -критерию при условии ограниченности  $\|H_{zv}\|_\infty < \gamma$  индуцированной нормы оператора  $H_{zv}$  передачи внешнего возмущения  $v$  на регулируемый выход  $z$ . К решению задачи условной  $H^2/H_\infty$ -оптимизации привлекается теория дифференциальных игр.

*Ключевые слова:*  $H^2/H_\infty$ -теория управления, диффузионное уравнение Ито, мультипликативная стохастическая система, индуцированная норма оператора, регулируемый выходной сигнал, регулятор по наблюдаемому выходному сигналу.

DOI: 10.31857/S0005231025020039, EDN: IQWNGK

### 1. Введение

В работе представлены результаты  $H^2/H_\infty$ -теории управления нестационарными объектами, заданными стохастическими уравнениями Ито, коэффициенты сноса и диффузии которых линейно зависят от векторов состояния  $x$ , управления  $u$  и внешнего возмущения  $v$ . Это уравнения Ито вида

$$(1.1) \quad \begin{aligned} dx(t) &= \varphi(t)dt + \Phi(t)dW(t), \quad \varphi = Ax + B_1u + B_2v, \\ \Phi dW &= A_0xdw_0 + B_{01}udw_1 + B_{02}vdw_2. \end{aligned}$$

Такое специфическое строение коэффициентов сноса и диффузии дает основание называть уравнение (1.1) *мультипликативным* по каждой из трех переменных. Стохастические процессы  $w_i(t)$ ,  $i = 0, 1, 2$  предполагаются скалярными, что на самом деле не является ограничением. Не является ограничением и зависимость сноса  $\varphi(t)$  и диффузии  $\Phi(t)dW(t)$  от одного и того же возмущения  $v(t)$ . Наконец, процессы  $w_i(t)$  предполагаются статистически независимыми, не обязательно с единичной матрицей интенсивности.

Объект имеет два выходных сигнала – регулируемый  $z$  и наблюдаемый  $y$ :

$$(1.2) \quad \begin{cases} z(t) = C_1x(t) + D_{11}u(t) + D_{12}v(t), \\ y(t) = C_2x(t) + D_{21}u(t) + D_{22}v(t), \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

В нестационарном случае матричные коэффициенты зависят от параметра времени  $t$ . Рассматриваются случаи конечного ( $T < \infty$ ) и бесконечного ( $T = \infty$ ) интервалов наблюдения  $[0, T]$ . Начальное условие для уравнения (1.1) обозначается  $x_0$ .

Наличие в теории регуляторов регулируемого и наблюдаемого выходных сигналов естественно при постановке практических задач. Уже на начальном этапе теории оптимизации пришлось различать  $LQR$ -задачи синтеза линейных *квадратических* регуляторов по полному выходному сигналу  $z$  и  $LQG$ -задачи синтеза *гауссовских* регуляторов по информации, содержащейся в частично наблюдаемом выходном сигнале  $y$ . Хорошо, однако, известно, что в этом последнем случае при наличии помех не всегда удается обеспечить требуемую *робастность* регулятора. Свойство робастности – вообще одно из фундаментальных требований при синтезе регулятора в современной теории  $H^2/H_\infty$ -управления и особенно в теории так называемых *неопределенных* систем. Заметим, что проблема робастности при наличии помех как внешних, так и внутренних, свойственных неопределенному объекту, является важнейшей не только в теории синтеза регуляторов, но и в *задачах фильтрации*. Однако в этой статье задачи фильтрации не рассматриваются. Не затрагиваются также задачи оптимизации управления и фильтрации для *дискретных систем*. Здесь же считаем уместным обратить внимание читателя на сходство многих результатов детерминированной теории управления с некоторыми результатами стохастической  $H^2/H_\infty$ -теории, особенно в части управления объектами с регулятором по вектору состояния, в разделе 2. Основная же тема работы – это стохастическая теория робастного управления системами вида (1.1)–(1.2).

Синтез регулятора  $H^2/H_\infty$ -теории является задачей условной оптимизации по квадратическому критерию при условии ограниченности заданным числом  $\gamma > 0$  операторной нормы  $\|H_{zv}\|_\infty$  оператора  $H_{zv}$ , заданного в функциональном пространстве входных возмущений  $v(\cdot)$  объекта и со значениями в функциональном пространстве регулируемых выходных сигналов  $z(\cdot)$ . Регулятор должен обеспечивать устойчивость замкнутой им системы и условие  $\|H_{zv}\|_\infty < \gamma$  ограниченности индуцированной нормы. Описание такого класса регуляторов составляет в общей теории  $H^2/H_\infty$ -управления подраздел, обозначаемый как  $H_\infty$ -теория регуляторов.

В теории стационарных систем общепринято рассматривать класс регуляторов вида  $u(t) = \mathcal{K}(t, x(\cdot)|_0^t)$ ,  $t > 0$ , где функция  $\mathcal{K}$  измерима по Борелю и непрерывна по Липшицу от второго аргумента. Если  $u(t) = Kx(t)$  и матрица  $A + B_1K$  *устойчива* (так будем называть матрицу, устойчивую по Гурвицу), то рассматривают передаточную от  $v$  к  $z$  функцию

$$M(s) = (C_1 + D_1K)(sI - (A + B_1K))^{-1}B_2,$$

и в этом случае полагают  $\|H_{zv}\|_\infty = \sup_{\omega \in R} \sigma(M(j\omega)I)$ , где  $\sigma(M(s))$  – наибольшее сингулярное число матрицы  $M(s)$ . Число  $\|H_{zv}\|_\infty$ , так определенное, называют также нормой Харди передаточной функции. Наличием

ограничения  $\|H_{zv}\|_\infty < \gamma$  обусловлена особенностью условной, субоптимальной  $H^2/H_\infty$ -теории по сравнению с теорией безусловной  $LQR$ -оптимизации по энергетическому, в данном случае, критерию оптимальности.

Введением понятия  $H_\infty$ -управления теория регулирования и управления обязана Г. Зеймсу, опубликовавшему в 1981 г. работу [1]. Основные результаты теории  $H^2/H_\infty$ -управления, полученные сначала для линейных стационарных систем, см., например, [2, 3], были в дальнейшем обобщены на нестационарные системы и сформулированы на пространственно-временном языке (языке пространства состояний), см. [4, 5]. Наиболее плодотворное обобщение теории  $H^2/H_\infty$ -управления было получено в рамках теории *дифференциальных игр* [6], после чего стало возможным единообразное изучение нестационарных детерминированных и стохастических [7] систем, заданных на конечном интервале времени, и систем с ненулевыми начальными условиями для вектора состояния. Оказалось возможным изучение бесконечномерных динамических систем управления и даже некоторых типов нелинейных систем. Подробная литература по названным обобщениям  $H^2/H_\infty$ -теории приводится в монографии [8], введение к разделу 3.2.

Переход от теории стационарных систем к теории систем нестационарных потребовал, естественно, обобщения многих понятий с частотного языка на язык пространственно-временной. Так, например, обычное определение устойчивой стационарной системы в ряде случаев оказалось удобным заменить на понятие системы экспоненциально устойчивой, устойчивой в смысле “вход–выход” или в другом каком-нибудь подходящем смысле. Используя какое-либо из этих определений, можно обобщить на нестационарный случай понятия стабилизируемой, наблюдаемой и т.п. нестационарной системы. Так, например, в нестационарном случае система  $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$  называется стабилизируемой, если существует ограниченная матричная функция  $K(t)$  такая, что система  $\dot{x} = (A(t) + B(t)K(t))x$  экспоненциально устойчива. Еще пример: если  $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ ,  $y = C(t)x + D(t)v$ , то пара  $(A(t), C(t))$  называется детектируемой, если существует ограниченная матричная функция  $L(t)$  такая, что система  $\dot{x} = (A(t) - L(t)C(t))x$  экспоненциально устойчива. Заметим, что необходимостью обобщения было вызвано и появление в  $H_\infty$ -теории понятия индуцированной  $H_\infty$ -нормы оператора вместо нормы матричной передаточной функции  $H_{zv}(s)$ ,  $Re s > 0$ .

Задача  $H^2/H_\infty$ -управления в мультипликативном случае решалась в [9] для класса нединамических каузальных регуляторов по вектору  $x(\cdot)$  состояния системы. Иными словами, регулятор отыскивался в виде  $u(t) = K(t, x(\cdot)|_0^t)$ ,  $t \geq 0$  и, более узко, в виде  $u(t) = K(t)x(t)$ . Объект управления в [9] был стохастический с диффузией  $\Phi dW$ , мультипликативной по векторам состояния, управления и внешнего возмущения; случай чисто детерминированного объекта (с нулевой диффузией) не исключался. Но не был рассмотрен случай простой линейной диффузии вида  $(\Phi dW)(t) = B(t)dW(t)$ . В этой работе объект остается общим мультипликативным, но рассматривается и случай линейной диффузии. Относительно матричных коэффициентов фор-

мулы  $z = C_1x + D_{11}u + D_{12}v$  принимались предположения  $D_{12} = 0$ ,  $D'_{11}C_1 = 0$ ,  $D'_{11}D_{11} = I$ ; в настоящей работе ослабляем эти ограничения, а в (1.2) обозначаем  $D_{11}$  как  $D_1$  и  $D_{22}$  как  $D_2$ .

Прослеживается интересная связь между стохастической теорией конечномерных мультипликативных систем и детерминированной теорией матричных алгебр Ли. Приложения групп Ли к обыкновенным дифференциальным уравнениям широко известны, см., например, [10]. Но математический аппарат теории групп Ли может найти применение и при отыскании фундаментальных матриц стохастических мультипликативных уравнений и интегральных представлений для решений таких уравнений [11]. Фундаментальная матрица  $\Phi(t, \tau)$  в этом случае является случайной функцией, а общее решение уравнения, возмущенного помехой  $h(t)$ , задается формулой

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \circ dh(\tau),$$

в которой через  $\circ dh$  обозначен дифференциал Стратоновича–Фиска. О дифференциале Стратоновича–Фиска см., например, [12].

Приведем небольшой список публикаций, тематически близких к задаче анализа систем рассматриваемого здесь мультипликативного типа. В [13] рассмотрена задача численной аппроксимации решения стохастического уравнения вида

$$dx_t = (Ax_t + f(x_t))dt + \sum_{i=1}^n (B_i x_t + g_i(x_t))dw_i, \quad x(0) = x_0 \in R^d$$

с нелинейными функциями  $f, g_i : R^d \rightarrow R^d$ ; матрицы  $A, B_i \in R^{d \times d}$  принимают значения в матричной алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  с коммутаторными соотношениями  $[A, B] = 0$ ,  $[B_i, B_j] = 0$  для всех  $i, j$ . Анализ численных алгоритмов нахождения решений так называемых экспоненциальных интеграторов [14] является активной областью исследований как мультипликативных уравнений, так и уравнений с аддитивными шумами [15, 16]. В [17] исследована среднеквадратическая устойчивость численных методов вычисления экспоненциальных интеграторов. Теоретико-групповые методы являются эффективными при численном интегрировании и стохастических уравнений с частными производными [18]. Из работ отечественных авторов отметим исследование бесконечномерного стохастически мультипликативного уравнения с операторами  $A, B$ , действующими в сепарабельном гильбертовом пространстве [19]. Предполагается, что оператор  $A$  порождает здесь полугруппу операторов  $S(t)$ ,  $t > 0$  класса  $C_0$ , что гарантирует корректность задачи Коши для невозмущенного уравнения  $\dot{X}_t = AX(t)$ .

Дадим краткое изложение плана статьи. В разделах 2, 3 дана сводка известных результатов теории  $H^2/H_\infty$ -управления: с регулятором по состоянию в разделе 2, с регулятором по выходному сигналу в разделе 3. В разделе 4 излагается теория регулятора по выходу для линейных нестационарных сто-

хастических систем с линейной гауссовской диффузией. Это *LEQG*-задача риск-сенситивного управления, обобщающая обычную *LQG*-задачу. Раздел 5 содержит материал об управлении стохастическими нестационарными системами с регулятором по состоянию в цепи обратной связи, раздел 6 – сведения о теории мультипликативных систем с динамическим регулятором по наблюдаемому выходному сигналу. В разделе 7 изложены элементы теории робастных стохастических систем. Заключительные замечания содержатся в разделе 8.

## 2. Элементы $H^2/H_\infty$ -теории объектов с регулятором по состоянию

Стандартная проблема детерминированной  $H^2/H_\infty$ -теории как стационарных, так и нестационарных систем управления формулируется следующим образом: для заданного  $\gamma > 0$  найти условно-оптимальное управление в классе всех допустимых регуляторов. Регулятор называем допустимым, если замкнутая им по обратной связи система устойчива и удовлетворяет условию  $\|H_{zv}\|_\infty < \gamma$ . В простом случае стационарной системы без управления

$$\dot{x} = Ax + Bv, \quad z = Cx, \quad x(0) = 0,$$

требование допустимости принимает следующий вид [20]: устойчива матрица  $A$  и ограничена норма  $\|M(s)\|_\infty < \gamma$  передаточной функции  $M(s) = C(sI - A)^{-1}B$ . Согласно *BR*-лемме о вещественной ограниченности (*BR* = *Bounded Real*), см. [21], условию допустимости равносильно каждое из следующих двух утверждений: (i) существует матрица  $\tilde{P} \succ 0$  такая, что  $A'\tilde{P} + \tilde{P}A + \tilde{P}BB'\tilde{P} + C'C \prec 0$ , (ii) уравнение Риккати  $A'P + PA + PBB'P + C'C = 0$  имеет стабилизирующее (т.е. такое, что матрица  $A + BB'P$  устойчива) решение  $P \succeq 0$ .

Если условия (i), (ii) равносильны, то  $P \prec \tilde{P}$  и, таким образом,  $0 \preceq P \prec \tilde{P}$ . Тем самым проверка допустимости регулятора сводится к проверке существования (и выполнения некоторых свойств) решений неравенств и/или уравнений Риккати. В случае нестационарных линейных систем алгебраическое уравнение Риккати уступает место дифференциальному уравнению, т.е. к левой части уравнения для  $P$  в (ii) добавляется производная по времени  $\dot{P}$ . Рассмотрим *теоретико-игровую* постановку  $H^2/H_\infty$ -задачи условно-оптимального, в классе допустимых регуляторов, управления. Она основана на следующем наблюдении: для замкнутой системы при начальном условии  $x(0) = 0$  ограничение  $\|H_{zv}\|_\infty < \gamma$  выполнено тогда и только тогда, когда существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что для всех  $v(\cdot) \in L_2[0, \infty)$  справедливо соотношение

$$(2.1) \quad J_\gamma(u, v) := \int_0^\infty (\gamma^2 \|v(t)\|^2 - \|z(t)\|^2) dt \geq \gamma^2 \varepsilon \int_0^\infty \|v(t)\|^2 dt.$$

В динамической игре первый игрок, конструктор регулятора, стремится минимизировать проигрыш  $J_\gamma(u, v)$ , выбирая наилучшее управление  $u^*(\cdot)$ ,

а второй игрок стремится его максимизировать, выбирая наименее благоприятное внешнее возмущение  $v^*(\cdot)$ . Оптимальное значение функционала  $J_\gamma(u, v)$  в седловой точке в случае, когда  $u(t) = K(t, x(\cdot)|_0^t)$ , запишется в виде  $\inf_u \sup_{v \in L_2[0, \infty)} J_\gamma(u, v)$ . Таковы основные понятия и обозначения  $H_\infty$ -теории регулятора по вектору состояния, если рассматривать детерминированные системы как стационарные, так и нестационарные.

Алгебраическое уравнение Риккати для  $P$  и дифференциальное уравнение с производной  $\dot{P}$  в его левой части назовем ассоциированными друг с другом. Дифференциальное уравнение интересно теми решениями  $P(\cdot)$ , для которых каждая матрица  $P(t)$  является неотрицательно определенной,  $P(t) \succeq 0$ ,  $t \geq 0$ , и теми, для которых матричная функция  $t \mapsto A(t) - BB'P(t)$  экспоненциально устойчива. Часто полезно перейти в уравнении объекта к новым переменным и оба ассоциированных уравнения Риккати, алгебраическое и дифференциальное, сопоставлять именно этому уравнению состояния в новых переменных. Проиллюстрируем это на простом примере детерминированной системы с управлением вида

$$(2.2) \quad \dot{x} = Ax + B_1u + B_2v, \quad z = C_1x + D_1u, \quad x(0) = 0.$$

Пусть  $G := D_1'D_1 \succ 0$ , тогда  $D_1'z = D_1'C_1x + D_1'D_1u$ , откуда  $u = \bar{u} - G^{-1}D_1'C_1x$ , где  $\bar{u} := G^{-1}D_1'z$  - новый вектор управления. Заменяя в системе (2.2)  $u(\cdot)$  на  $\bar{u}(\cdot)$ , запишем ее в виде

$$(2.3) \quad \dot{x} = \tilde{A}x + B_1\bar{u} + B_2v, \quad z = \tilde{C}_1x + D_1\bar{u},$$

где  $\tilde{A} = A - B_1G^{-1}D_1'C_1$ ,  $\tilde{C}_1 = (I - D_1G^{-1}D_1')C_1$ . Матрица  $K$  решает исходную *минимаксную* задачу о регуляторе тогда и только тогда, когда  $\tilde{K} := K + G^{-1}D_1'C_1$  решает теоретико-игровую задачу для (2.3) с вектором  $\bar{u}(\cdot)$ . При этом пара  $(A, B_1)$  стабилизируема тогда и только тогда, когда стабилизируема пара  $(\tilde{A}, B_1)$ . Основным результатом применения теории дифференциальной игры к синтезу  $H_\infty$ -регулятора по состоянию для линейного стационарного объекта сформулируем ниже в виде леммы 1. Будем рассматривать дифференциальное уравнение Риккати на бесконечном интервале ( $t \in [0, \infty)$ ) с условием  $X(T) = M$  для некоторой матрицы  $M \succeq 0$  и некоторого  $T < \infty$ :

$$(2.4) \quad \begin{aligned} & \dot{X} + (A - B_1G^{-1}D_1'C_1)'X + X(A - B_1G^{-1}D_1'C_1) + \\ & + C_1'(I - D_1G^{-1}D_1')C_1 + X(B_1G^{-1}B_1' - \gamma^{-2}B_2B_2')X = 0. \end{aligned}$$

Через  $X_T(t)$  обозначим решение уравнения (2.4), отвечающее выбору  $M = 0$ .

*Лемма 1. Пусть пара  $(\tilde{A}, \tilde{C}_1)$  детектируема. Тогда (i)  $X_T(t)$  при каждом фиксированном  $t$  не убывает по  $T$ . (ii) Если существует решение  $X \succeq 0$  алгебраического уравнения, с которым ассоциировано уравнение (2.4), тогда существует и минимальное такое решение, обозначаемое ниже через  $X^+$ . При этом  $X^+ \succeq X_T(t)$  для всех  $T \geq 0$ . А если пара  $(\tilde{A}, \tilde{C}_1)$  еще и наблюдаема, тогда каждое решение  $X \succeq 0$  алгебраического уравнения является и положительно определенным,  $X \succ 0$ . (iii) Если решение  $X^+ \succeq 0$  существует,*

тогда, выбрав регулятор

$$(2.5) \quad u^*(t) = K^*x(t), \quad K^* = -G^{-1}(B_1'X + D_1'C_1),$$

гарантированно получим равенство

$$(2.6) \quad \sup_{v \in L_2[0, \infty)} J_\gamma(K^*x, v) = x_0'X^+x_0.$$

Подробности см. в [22].

### 3. Регуляторы по выходному сигналу, зависящему от внешнего возмущения

Приведем теперь результаты работ [21, 23], касающиеся синтеза  $H^2/H_\infty$ -регулятора по выходному сигналу  $y(\cdot)$  для объекта

$$(3.1) \quad \dot{x} = Ax + B_1u + B_2v, \quad z = C_1x + D_1u, \quad y = C_2x + D_2v.$$

Здесь  $v$  – сигнал внешнего возмущения и  $D_2 \neq 0$ . Рассмотрим динамический регулятор с вектором состояния  $x_c$  вида

$$(3.2) \quad \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y, \quad u = C_c x_c + D_c y.$$

Такой регулятор порождает расширенную систему с вектором состояния  $\bar{x} := (x', x_c)'$ . Если объект и динамический регулятор являются стационарными системами, то стационарной является и расширенная система, для которой передаточная функция  $\tilde{H}_{zv}(s)$  от  $v$  к  $z$  равна

$$(3.3) \quad \tilde{H}_{zv}(s) = (C_1 + D_1 D_c C_2 \quad D_1 C_c) \times \\ \times \left( sI - \begin{pmatrix} A + B_1 D_c C_2 & B_1 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} B_2 + B_1 D_c D_2 \\ B_c D_2 \end{pmatrix} + D_1 D_c D_2.$$

Она обобщает формулу для передаточной функции

$$(3.4) \quad H_{zv}^K(s) = (C_1 + D_1 K)(sI - A - B_1 K)^{-1} B_2$$

замкнутой системы, получаемой при замыкании объекта (3.1) нединамическим регулятором вида  $u(t) = K(t)x(t)$ . Ниже понадобится и понятие инъективного отображения  $L$  выходного сигнала  $y(\cdot)$ , в некотором роде двойственное к понятию отображения  $K$ , задающего регулятор  $u = Kx$ . Сначала ограничимся условием  $D_c = 0$ . Рассмотрим систему без управления

$$(3.5) \quad \dot{x} = Ax + B_2v + Ly, \quad z = C_1x, \quad y = C_2x + D_2v.$$

Отображение  $L$  порождает передаточную функцию

$$H_{zv}^L(s) = C_1(sI - A - LC_2)^{-1}(B_2 + LD_2)$$

системы (3.5). Как отмечалось во Введении, отображение  $L$  тесно связано с определением детектируемой системы в нестационарном случае. Введенных понятий достаточно для того, чтобы сформулировать условия разрешимости задачи об  $H_\infty$ -регуляторе по выходному сигналу.

Лемма 2. Пусть для объекта (3.1) при  $D_c = 0$  существует регулятор (3.2) такой, что устойчива матрица состояния  $\begin{bmatrix} A & B_1 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}$  расширенной системы и ограничена норма Харди передаточной функции  $\tilde{H}_{zv}(s)$  в (3.3), так что  $\|\tilde{H}_{zv}(s)\|_\infty < 1$ . Тогда 1) существуют матрица  $K$  регулятора и  $= Kx$  по вектору состояния и матрица  $X \succ 0$  такие, что удовлетворяется уравнение Риккати (2.4); при этом устойчива матрица  $A + B_1 K$  и ограничена норма Харди передаточной функции  $H_{zv}^K(s)$  в (3.4), т.е.  $\|H_{zv}^K(s)\|_\infty < 1$ ; 2) существуют матрица  $L$  инъективного отображения выходного сигнала и матрица  $Y \succ 0$  такие, что

$$(A + LC_2)'Y + Y(A + LC_2) + YC_1' C_1 Y + (B_2 + LD_2)(B_2 + LD_2)' \prec 0;$$

при этом устойчива матрица  $A + LC_2$  и ограничена норма Харди передаточной функции  $H_{zv}^L(s)$ , так что  $\|H_{zv}^L(s)\|_\infty < 1$ . Матрица  $Y$  удовлетворяет уравнению Риккати

$$(3.6) \quad (A - B_2 D_2' \Gamma^{-1} C_2)Y + Y(A - B_2 D_2' \Gamma^{-1} C_2)' + B_2(I - D_2' \Gamma^{-1} D_2)B_2' - \\ - Y(C_2' \Gamma^{-1} C_2 - \gamma^{-2} C_1' C_1)Y = 0, \quad \Gamma := D_2 D_2' \succ 0.$$

Заметим, что это уравнение получается по принципу двойственности из (2.4) заменой коэффициентов  $A', B_1', C_1', D_1$  на  $A, C_2, B_2, D_2'$  соответственно и, следовательно, заменой  $G = D_1' D_1$  на  $\Gamma = D_2 D_2'$ . При сформулированных в лемме 2 предложениях 1), 2) и дополнительных условиях о детектируемости пар  $(A - B_1 G^{-1} D_1' C_1, (I - D_1 G^{-1} D_1') C_1)$  и  $(A, C_2)$  и о стабилизируемости пар  $(A, B_1)$  и  $(A - B_2 D_2' \Gamma^{-1} C_2, B_2(I - D_2' \Gamma^{-1} D_2))$  можно утверждать (см. [23, 24]), что если уравнения Риккати для  $X$  в (2.4) и для  $Y$  в (3.6) допускают минимальные решения  $X^+ \succeq 0$  и  $Y^+ \succeq 0$  соответственно и при этом  $\rho(Y^+ X^+) < \gamma^2$ , тогда динамическая игра с системой уравнений (3.1) и функционалом  $J_\gamma(\cdot, \cdot)$ , определенным в (2.1), имеет конечное значение  $\inf_u \sup_{v \in L_2} J_\gamma(Kx, v)$ . Далее, оптимальный минимизирующий регулятор определяется уравнениями [22]

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B_1 u + B_2 \hat{v} + (I - \gamma^{-2} Y^+ X^+)^{-1} (Y^+ C_2' + B_2 D_2') \Gamma^{-1} (y - \hat{y}), \\ u^* &= -G^{-1} (B_1' X^+ + D_1' C_1) \hat{x}, \end{aligned}$$

где  $\hat{v} = \gamma^{-2} B_2' X^+ \hat{x}$ ,  $\hat{y} = C_2 \hat{x} + D_2 \hat{v}$ .

*Замечание.* Приведенные в лемме 2 результаты справедливы при  $D_c = 0$ . Если  $D_c \neq 0$ , то блок (11) в матрице состояния  $A_{cl}$  заменяется на  $A + B_1 D_c C_2$ , см. (3.3), и для  $H_{zv}$  имеем  $H_{zv} = C_{cl}(sI - A_{cl})^{-1} B_{cl} + D_{cl}$ , где  $B_{cl} = \begin{bmatrix} B_2 + B_1 D_c D_2 \\ B_c D_2 \end{bmatrix}$ ,  $C_{cl} = [C_1 + D_1 D_c C_2 \quad D_1 C_c]$  и  $D_{cl} = D_1 D_c D_2$ . Любопытно, что при  $D_c \neq 0$  оптимальный минимизирующий регулятор совпадает с тем, который получен выше для случая  $D_c = 0$ , см. [21, 23].

#### 4. $H_\infty$ -регуляторы по выходу для нестационарных систем с гауссовской диффузией

Системы с гауссовской (линейной) диффузией являются простейшими в классе линейных стохастических систем. Пусть

$$\begin{aligned} dx(t) &= (A(t)x(t) + B_1(t)u(t))dt + B_2(t)dW(t), & x(0) &= x_0, \\ dy(t) &= C_2(t)x(t)dt + D_2(t)dW(t), & y(0) &= y_0, & 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

(( $x(0), y(0)$ ),  $W(t)$ ) обычно предполагаются независимыми). Если ( $x(0), y(0)$ ) – гауссовский вектор, то ( $x(t), y(t)$ ) – гауссовский процесс. Теорию регулятора по выходу  $y(\cdot)$  будем строить, отправляясь от ее интерпретации как минимаксной теории  $LQG$ -управления по выходному сигналу [25]. В этой теории в качестве критерия принимается экспонента от квадратичного функционала [26, 27]:

$$J_T(u) = 2\tau \log E \exp \frac{1}{2\tau} \left[ x'(T)Mx(T) + \int_0^T F(x(t), u(t))dt \right],$$

где  $F(x, u)$  – квадратичная форма на пространстве пар векторов  $(x, u)$ . Задача, как обычно, состоит в том, чтобы найти  $\inf_{u(\cdot)} J_T(u(\cdot))$ . Это задача риск-сенситивного управления, обозначаемая как  $LEQG$ -задача; в пределе при  $\tau \rightarrow \infty$  получают обычную  $LQG$ -задачу риск-нейтрального управления. При произвольном  $\tau$  регулятор получается в виде  $u(t) = K\hat{x}(t)$ , где  $\hat{x}$  – фазовый вектор фильтра, оценивающего  $x(t)$  по выходу  $y(\cdot)$ .

Обратим внимание на аналогию между результатами, изложенными в предыдущем разделе, и теми, которые излагаются ниже в этом разделе. Следует, однако, иметь в виду, что в разделе 3 были представлены преимущественно те результаты, которые касаются теории стационарных систем, заданных на бесконечном горизонте  $0 \leq t < \infty$ , а здесь – те, что относятся к нестационарным системам, определенным при  $0 \leq t < T, T < \infty$ . По этой причине алгебраические уравнения Риккати раздела 3 следует при сопоставлении результатов заменять на дифференциальные уравнения Риккати в этом разделе. Разумеется, завершенная теория систем обоих типов, детерминированных и стохастических гауссовских, охватывает как стационарные, так и нестационарные объекты.

Решение задачи управления в этом разделе дается при следующих предположениях. Во-первых, матрица квадратичной формы  $F(x, u)$ , зададим ее в виде  $\begin{pmatrix} R(t) & \Upsilon(t) \\ \Upsilon(t)' & G(t) \end{pmatrix}$ , удовлетворяет условию  $R - \Upsilon G^{-1} \Upsilon' \succ 0$ . Если определить регулируемый выход  $z = C_1 x + D_1 u$  и положить  $F(x, u) = z'z$  для прояснения аналогии с результатами предыдущего раздела, то получим  $R - \Upsilon G^{-1} \Upsilon' = C_1' C_1 - C_1' D_1 G^{-1} D_1' C_1 \succ 0$ . Полагаем также  $M \succeq 0$  и  $\tau = \gamma^2$ . Во-вторых, принимаем, что выполнены условия (i)–(iii), приводимые ниже в лемме 3.

Лемма 3. Предположим, что (i) дифференциальное уравнение Риккати, ассоциированное с алгебраическим уравнением (3.6), удовлетворяющее начальному условию  $Y(0) = Y_0$ , имеет решение  $Y = Y'$  такое, что  $Y(t) \succeq c_0 I$  для некоторого  $c_0 > 0$  и всех  $t \in [0, T]$ ; (ii) дифференциальное уравнение Риккати, ассоциированное с алгебраическим уравнением (2.4), удовлетворяющее начальному условию  $X(T) = M$ , имеет решение  $X$  такое, что  $X(t) = X'(t) \succeq 0$  для всех  $t \in [0, T]$ ; (iii) для каждого  $t \in [0, T]$  выполняется неравенство  $\rho(Y(t)X(t)) < \tau$ , означающее, что матрица  $I - \frac{1}{\tau}Y(t)X(t)$  имеет только положительные собственные значения. Тогда оптимальное управление задается регулятором по состоянию в виде

$$u^*(t) = -G^{-1}(B_1'(t)X(t) + \Upsilon'(t))\hat{x}(t),$$

где оценка  $\hat{x}$  вектора состояния  $x$  по наблюдаемому выходному сигналу  $y(\cdot)$  определяется фильтром

$$\begin{aligned} d\hat{x}(t) = & \left( A - B_1 G^{-1} \Upsilon' - \left( B_1 G^{-1} B_1' - \frac{1}{\tau} B_2 B_2' \right) X \right) \hat{x}(t) dt + \\ & + \left( I - \frac{1}{\tau} Y X \right)^{-1} (Y C_2' + B_2 D_2') \Gamma^{-1} \left( dy(t) - \left( C_2 + \frac{1}{\tau} D_2 B_2' X \right) \hat{x}(t) dt \right). \end{aligned}$$

Доказательство леммы 3 см. в [22, 28].

Новым аспектом теории является необходимость ответить на следующий вопрос: “Каков в данной теории класс допустимых регуляторов?”. Требуется, чтобы в обозначениях  $e(t) := x(t) - \hat{x}(t)$ ,  $\epsilon(t) := e(t) + \frac{1}{\tau} Y X \hat{x}(t)$  процесс

$$\alpha(t) := B_2' Y \epsilon(t) - D_2' \Gamma^{-1} (C_2 Y + D_2 B_2') Y^{-1} e(t)$$

порождал экспоненту

$$\zeta(t) = \exp \left\{ \int_0^t \alpha'(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|\alpha(s)\|^2 ds \right\},$$

являющуюся, как известно, см. [29], мартингалом на  $[0, T]$ . Для линейного регулятора, по крайней мере, это условие выполняется [28]. И тогда нетрудно проверить, что регулятор, в классе допустимых, который обоспечивает инфимум критерия оптимальности, является линейным.

Некоторых комментариев требует также обобщение приведенных в этом разделе результатов на случай систем с бесконечным горизонтом,  $T = \infty$ . Коэффициенты в уравнениях объекта при  $T = \infty$  следует считать не зависящими от  $t$  и принять условие  $y(0) = 0$ , а функционал стоимости определить как  $J(u) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} J_T(u)$ . Далее, дифференциальные уравнения Риккати следует заменить на алгебраические, а предположения (i)–(iii) в лемме 3 конкретизировать, заменив условие существования симметрическо-го решения  $Y$  на пару следующих условий: (a)  $R - \Upsilon G^{-1} \Upsilon' \succeq 0$  и (b) пара

матриц  $(A - B_1 G^{-1} \Upsilon', R - \Upsilon G^{-1} \Upsilon')$  детектируема, а пара  $(A - B_2 D_2' \Gamma^{-1} C_2, B_2(I - D_2' \Gamma^{-1} D_2))$  стабилизируема. Кроме того, обозначения  $X$  и  $Y$  в лемме 3 надо будет заменить на общепринятые  $X_\infty, Y_\infty$  и предположить, что  $(i)'$  уравнение для  $Y$  допускает минимальное решение  $Y_\infty \succ 0$ , а  $(ii)'$  уравнение для  $X$  допускает минимальное решение  $X_\infty \succeq 0$ . Доказывается, что  $X_\infty$  и  $Y_\infty$  можно получить как предельные при  $T \rightarrow \infty$  значения соответственно для  $X = X_T$  и  $Y = Y_T$ . Это составляет утверждение следующей леммы.

*Лемма 4. При условиях, сформулированных выше, справедливы следующие утверждения: (i) Ассоциированное с (2.4) дифференциальное уравнение при  $M = 0$  имеет решение  $X_T(t) \succeq 0$  такое, что  $X_T(t) \rightarrow X_\infty$  при  $T \rightarrow \infty$ . (ii) Если  $Y_\infty \succeq Y_0 \succ 0$ , то ассоциированное с (3.6) дифференциальное уравнение при  $M = 0$  имеет решение  $Y(t; Y_0)$  такое, что  $Y(t; Y_0) \rightarrow Y_\infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . (iii) Для каждого  $T > 0$  и  $t \in [0, T]$  матрицы  $Y(t; Y_0)$  и  $X_T(t; M)$  удовлетворяют неравенству  $\rho(Y(t)X(t)) < \tau$ .*

См. [22, 28].

Лемма 4 доказывается следующим образом. Сначала проверяется, что при  $M = 0$  решение  $X_T(t) \succeq 0$  уравнения (2.4) сходится к  $X_\infty$  при  $T \rightarrow \infty$ . Для доказательства утверждения  $(ii)$  в лемме 4 рассматривается система

$$\dot{\eta} = A'\eta + C_2'\nu + R^{1/2}\omega, \quad \eta(0) = \eta_0; \quad \dot{\zeta} = B_2'\eta + D_2'\nu,$$

где  $\eta \in R^n$  – вектор состояния,  $\nu \in R^l$  – управление,  $\omega \in R^q$  – возмущение,  $\zeta \in R^p$  – регулируемый выход, и определяются функционалы

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \bar{J}_\tau^{T, Y_0}(\nu, \omega) &:= \eta(T)'\eta(T) + \int_0^T (\|\zeta(t)\|^2 - \tau\|\omega(t)\|^2) dt, \\ \bar{J}_\tau(\nu, \omega) &:= \int_0^\infty (\|\zeta(t)\|^2 - \tau\|\omega(t)\|^2) dt, \quad \omega \in L_2[0, T]. \end{aligned}$$

Применяя затем теорию дифференциальных игр, заключают, что  $\inf_\nu \sup_\omega \bar{J}_\tau(\nu, \omega) < \infty$  на бесконечном горизонте и что существует предел  $Y_\infty$  для уравнения (3.6) с решениями  $Y_T$  для каждого  $T < \infty$ . Таким образом, уравнение (3.6) имеет минимальное решение  $Y_\infty \succ 0$ , а тогда из леммы 1 в разделе 2 следует, что

$$(4.2) \quad \inf_\nu \sup_\omega \bar{J}_\tau(\nu, \omega) = \eta_0' Y_\infty \eta_0.$$

Наконец, так как переменные  $X^+$  и  $Y_\infty$  двойственны, то и формула  $\nu^* = -\Gamma^{-1}(D_2 B_2' + C_2 Y_\infty)\eta$  двойственна формуле (2.5), записанной в виде  $u^* = K^* x(t)$ , где  $K^* = -G^{-1}(D_1' C_1 + B_1' X^+)$ . И аналогично двойственны формулы (2.6) и (4.2). А вот неравенство  $Y_\infty \succeq Y_0$  не имеет аналога в лемме 1. Но по формуле (4.1) из  $Y_0 \preceq Y_\infty$  очевидным образом следует  $\bar{J}_\tau^{T, Y_0} \preceq \bar{J}_\tau^{T, Y_\infty}$  при  $\nu = \nu^*$ , откуда и в этом случае получаем (4.2). См. [22, 28].

## 5. $H_\infty$ -регуляторы по состоянию для неопределенных стохастических систем

В этом разделе рассматриваются общая мультипликативная стохастическая система и регулятор по вектору состояния в цепи обратной связи. Управляемый объект задан уравнениями (1.1), (1.2), регулятор – уравнением  $u(t) = Kx(t)$ , уравнение состояния замкнутой системы – уравнением

$$(5.1) \quad dx = ((A + B_1K)x + B_2v)dt + A_0xdw_0 + B_{01}Kxdw_1 + B_{02}vdw_2.$$

Система (5.1) является неопределенной в силу зависимости ее динамики от искомого, пока неизвестного параметра  $K$ . Коэффициент при  $x$  в диффузионной компоненте этого уравнения, равный  $A_0dw_0 + B_{01}Kdw_1$ , можно записать в виде

$$([A_0 \ 0] + [0 \ B_{01}]K)dW_1, \quad dW_1 := \begin{pmatrix} dw_0 \\ dw_1 \end{pmatrix},$$

тем самым вместо трех винеровских процессов  $w_0, w_1, w_2$  в (5.1) можно ограничиться двумя процессами  $W_1, w_2$ . Это означает, что можно, сохраняя прежние обозначения для матричных коэффициентов, просто положить в (5.1)  $w_0 = w_1$ :

$$(5.2) \quad dx = ((A + B_1K)x + B_2v)dt + (A_0 + B_{01}K)xdw_1 + B_{02}vdw_2.$$

Далее, вместо пары уравнений (1.2) можно, также без ограничения общности, принять

$$z(t) = C_1x(t) + D_1u(t), \quad y(t) = C_2x(t) + D_2v(t).$$

Замкнутую систему при  $t \geq s$ , где  $s$  – начальный момент времени,

$$(5.3) \quad dx = (A + B_1K)xdt + (A_0 + B_{01}K)xdw_1, \quad x(s) = h,$$

получаемую из (5.2) при  $v(t) \equiv 0$ , назовем номинальной. Эта система нестационарна даже при постоянных матричных коэффициентах в (5.2) и ее устойчивость следует понимать в смысле, например, экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом, если решение  $x(t)$  желательно считать элементом пространства  $L_2(s, \infty)$  функций, для которых  $\int_s^\infty \|x(t)\|^2 dt < \infty$ . В нестационарном случае следует подыскать подходящий аналог ограниченности  $\|H_{zv}\|_\infty < \gamma$  индуцированной нормы оператора  $H_{zv}$ . Подходящим стохастическим аналогом ограниченности нормы является следующее условие: существует постоянная  $\epsilon > 0$  такая, что при  $x(s) = 0$

$$(5.4) \quad \mathbb{E} \int_s^\infty (\|(C_1 + D_1K)x(t)\|^2 - \gamma^2\|v(t)\|^2) dt \leq -\epsilon\gamma^2 \mathbb{E} \int_s^\infty \|v(t)\|^2 dt$$

для каждого  $v \in L_2(s, \infty)$ . Заметим, что экспоненциальная устойчивость номинальной системы является *достаточным* условием того, чтобы уравнение (5.2) имело решения, принадлежащие  $L_2(s, \infty)$  для любого  $v \in L_2(s, \infty)$ .

Теперь сформулируем задачу о стохастическом  $H_\infty$ -регуляторе, решаемую в этом разделе: для системы (5.2) найти матрицу  $K$  такую, чтобы номинальная система (5.3) была экспоненциально устойчивой в среднем квадратичном, а замкнутая система (5.2) удовлетворяла требованию (5.4)  $H_\infty$ -ограниченности нормы оператора передачи  $H_{zv}$ . Как и в разделе 2, наиболее плодотворным для стохастического случая явилось обращение к теории линейно-квадратичных дифференциальных игр, ассоциированных с мультипликативным уравнением Ито и функционалом  $J(u, v) = \int_s^\infty \mathbb{E}(z'(t)z(t) - \gamma^2 \|v(t)\|^2) dt$ . Связующим звеном между  $H_\infty$ -теорией регулятора и теорией игр явилась здесь стохастическая  $BR$ -лемма, которую приведем ниже, следуя ее изложению в монографии [8].

Предположим, что система  $dx(t) = Ax(t)dt + A_0x(t)dw_1(t)$ ,  $x(s) = h$ , отвечающая выбору  $u(\cdot) \equiv 0$ ,  $v(\cdot) \equiv 0$  в уравнении (5.2), экспоненциально устойчива (и, как следствие, устойчива матрица  $A$ ) и существует постоянная  $\epsilon_2$ , такая что  $J_2(0, v) \leq -\epsilon_2 \int_0^\infty \|v(t)\|^2 dt$  для всех  $v \in L_2(0, \infty)$ . Тогда справедлива следующая стохастическая  $BR$ -лемма.

*Лемма 5. 1-я часть (существование): (а) для каждого  $s \geq 0$  и для  $h \in L_2(\Omega, \mathcal{F}_s, P)$  существует единственное возмущение  $v_2^s(\cdot) \in L_2(s, \infty)$  такое, что  $J(0, v_2^s(\cdot)) = \sup_{v \in L_2(s, \infty)} J(0, v)$ . (б) Существует матрица  $X_2 \succeq 0$  такая, что  $\sup_{v \in L_2(s, \infty)} J(0, v) = \mathbb{E}\langle h, X_2 h \rangle$ . (с) Для любого  $T > 0$  существует единственное, при условии  $X_{2T}(T) = 0$ , решение  $X_{2T}(\cdot) \succeq 0$  обобщенного уравнения Риккати*

$$\dot{X}_{2T} + A'X_{2T} + X_{2T}A + A_0'X_{2T} + R + X_{2T}B_2(I - B_{02}'X_{2T}B_{02})^{-1}B_2'X_{2T} = 0.$$

*2-я часть (минимаксное решение): (д) Наихудшее возмущение  $v_{2T}^s(\cdot)$ , максимизирующее функционал*

$$J_T(u, v) = \int_s^T \mathbb{E}(z'(t)z(t) - \gamma^2 \|v(t)\|^2) dt, \quad s \leq T < \infty,$$

*имеет вид*

$$v_{2T}^s = (I - B_{02}'X_{2T}(t)B_{02})^{-1}B_2'X_{2T}(t)x_{2T}^s(t),$$

*где  $x_{2T}^s(\cdot)$  есть оптимальная траектория, являющаяся решением замкнутой системы*

$$dx(t) = (A + B_2(I - B_{02}'X_{2T}(t)B_{02})^{-1}B_2'X_{2T}(t))x(t)dt + A_0x(t)dw_1(t) + B_{02}(I - B_{02}'X_{2T}(t)B_{02})^{-1}B_2'X_{2T}(t)x(t)dw_2(t), \quad x(s) = h.$$

*(е) Матрица  $X_2$  в пункте (б) является также минимальным решением обобщенного уравнения Риккати*

$$A'X_2 + X_2A + A_0'X_2A_0 + R + X_2B_2(I - B_{02}'X_2B_{02})^{-1}B_2'X_2 = 0,$$

*таким что  $I - B_{02}'X_2(t)B_{02} \succ 0$ .*

Сформулируем теперь основную теорему раздела 5 для случая мультипликативной системы на бесконечном интервале времени.

*Теорема 1.* Пусть выполнены предположения, при которых справедлива стохастическая BR-лемма. Предположим также, что  $\|C_1x + D_1u\|^2 > \epsilon_1\|u\|^2$  для некоторой  $\epsilon_1 > 0$  и для всех  $x \in R^n$ ,  $u \in R^m$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

(а) Для  $h \in L_2(\Omega, \mathcal{F}_s, P)$  и всех  $s \geq 0$  существует единственная минимаксная пара для функционала  $J(u, v)$ .

(б) Существует единственное решение  $X \succeq 0$  алгебраического уравнения Риккати

$$(5.5) \quad \begin{aligned} & A'X + XA + A'_0XA_0 + R + XB_2(I - B'_{02}XB_{02})^{-1}B'_2X - \\ & - (XB_1 + A'_0XB_{01} + Q)(G + B'_{01}XB_{01})^{-1}(XB_1 + A'_0XB_{01} + Q)' = 0, \end{aligned}$$

такое что  $I - B'_{02}XB_{02} \succ 0$  и  $V = E\langle h, Xh \rangle$ .

(с) Минимаксная пара представляется в виде  $u = F_1x$ ,  $v = F_2x$ , где

$$(5.6) \quad \begin{aligned} F_1 &= - (G + B'_{01}XB_{01})^{-1}(XB_1 + A'_0XB_{01} + Q)', \\ F_2 &= (I - B'_{02}XB_{02})^{-1}B'_2X. \end{aligned}$$

(д) Замкнутая стохастическая система

$$(5.7) \quad dx = (A + B_1F_1 + B_2F_2)xdt + (A_0 + B_{01}F_1)xdw_1(t) + B_{02}F_2x dw_2(t)$$

с  $x(s) = h$  экспоненциально устойчива в среднем квадратическом.

С полученными в теореме 1 выводами интересно сопоставить результаты решения такой же задачи на конечном горизонте [30]. Пусть

$$J_T(u, v) = \int_s^T E(z'(t)z(t) - \gamma^2\|v(t)\|^2)dt, \quad s \leq T < \infty.$$

Рассмотрим стандартную задачу стохастического управления  $\inf_{u \in L_2[s, T]} J_T(u, 0)$ .

С этой задачей ассоциируется решение  $X_{1T} \succeq 0$  обобщенного уравнения Риккати

$$(5.8) \quad \begin{aligned} & \dot{X}_{1T} + A'X_{1T} + X_{1T}A + A'_0X_{1T}A_0 + R - (X_{1T}B_1 + A'_0X_{1T}B_{01} + Q) \times \\ & \times (G + B'_{01}X_{1T}B_{01})^{-1}(X_{1T}B_1 + A'_0X_{1T}B_{01} + Q)' = 0, \quad X_{1T}(T) = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет единственное решение  $X_{1T} \succeq 0$ , определяющее оптимальное управление

$$u_{1T} = -(G + B'_{01}X_{1T}B_{01})^{-1}(B'_1X_{1T} + B'_{01}X_{1T}A_0 + Q')x.$$

Решения  $X_{1T}$  и  $X_{2T}$  обоих дифференциальных уравнений Риккати позволяют решить минимаксную задачу управления по общему критерию  $J_T(u, v)$  на конечном горизонте. В [8] доказана следующая

*Теорема 2.* Пусть  $F(x, u) > \epsilon_1 \|u\|^2$  и  $J(0, v) \leq -\epsilon_2 \int_0^\infty \|v(t)\|^2 dt$  для всех  $v \in L_2(0, \infty)$ . Тогда теоретико-игровая минимаксная задача с критерием  $J_T(u, v)$  имеет седловую точку  $(u_T(\cdot), v_T(\cdot))$ . Дифференциальное уравнение Риккати

$$(5.9) \quad \begin{aligned} & \dot{X}_T + A'X_T + X_TA + A'_0X_TA_0 + R - (X_TB_1 + A'_0X_TB_{01} + Q) \times \\ & \times (G + B'_{01}X_TB_{01})^{-1}(X_TB_1 + A'_0X_TB_{01} + Q)' + \\ & + X_TB_2(I - B'_{02}X_TB_{02})^{-1}B'_2X_T = 0, \quad X_T(T) = 0 \end{aligned}$$

имеет единственное решение  $X_T \succeq 0$ . Седловая точка игры представляется в виде  $u_T = F_{1T}x$ ,  $v_T = F_{2T}x$ , где

$$\begin{aligned} F_{1T} &= -(G + B'_{01}X_TB_{01})^{-1}(B'_1X_T + B'_{01}X_TA_0 + Q'), \\ F_{2T} &= (I - B'_{02}X_TB_{02})^{-1}B'_2X_T. \end{aligned}$$

Доказательство этой теоремы достаточно сложное, оно использует результаты ряда работ. См. [31–33].

Интересно сравнить уравнения Риккати (5.6) и (5.5): последнего слагаемого в правой части уравнения (5.6) не было в (5.5). Конечно, это объясняется тем, что уравнение (5.5) ассоциировалось с критерием  $J_T(u, 0)$ , а (5.6) – с критерием  $J_T(u, v)$ . Появление слагаемого  $X_TB_2(I - B'_{02}X_TB_{02})^{-1}B'_2X_T$  вполне естественно в задаче максимизации функционала  $J_T(u, v)$  по второму аргументу.

Интересно также представление критерия  $J_T(u, v)$  через функции  $u_T, v_T$ , определяющие седловую точку  $(u_T(\cdot), v_T(\cdot))$ . Предположим, что решение  $X_T$  уравнения (5.6) существует на интервале  $[T - \alpha, T]$  и  $s$  – точка из этого интервала. Тогда, применяя формулу Ито к квадратичной форме  $x(t)'X_Tx(t)$ , где  $x(t)$  удовлетворяет уравнению (1.1) при ограничении  $w_0 = w_1$ , получаем

$$\begin{aligned} J_T(u, v) &= \mathbb{E} \int_s^T \|(I - B'_{02}X_TB_{02})^{\frac{1}{2}}(v(t) - F_{2T}x(t))\|^2 dt + \\ &+ \mathbb{E} \int_s^T \|(G + B'_{01}X_TB_{01})^{\frac{1}{2}}(u(t) - F_{1T}x(t))\|^2 dt. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что седловая точка удовлетворяет условию

$$J_T(u_T, v) \leq J_T(u_T, v_T) = \mathbb{E} h' X_T(s) h \leq J_T(u, v_T).$$

При достаточно малом значении параметра  $\alpha$  это условие используется для доказательства существования решения дифференциального уравнения Риккати (5.6) на конечном интервале  $t \in [s, T]$ .

**6.  $H_\infty$ -регуляторы по выходу для стохастических систем  
с мультипликативными возмущениями**

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида

$$(6.1) \quad \Sigma : \begin{cases} dx(t) = (Ax(t) + B_1v(t) + B_2u(t))dt + A_0x(t)dw_0(t) + \\ + B_{01}v(t)dw_1(t) + B_{02}u(t)dw_2(t), \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \\ z(t) = C_1x(t) + D_{11}v(t) + D_{12}u(t), \\ y(t) = C_2x(t) + D_{21}v(t), \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

Регулятором в цепи обратной связи является детерминированная *динамическая* система с вектором состояния  $\hat{x}$ , заданная уравнениями

$$(6.2) \quad d\hat{x}(t) = A_k\hat{x}(t)dt + B_k y(t)dt, \quad u(t) = C_k\hat{x}(t) + D_k y(t)$$

с матричными коэффициентами, пока не определенными.

Вектор состояния системы, замкнутой регулятором, обозначим через  $\bar{x}$ , полагая  $\bar{x}' := (x', \hat{x}')$ . Стохастическое уравнение для  $\bar{x}$  получается как результат некоторых громоздких, но элементарных вычислений, и нетрудно убедиться, что функции  $t \mapsto \bar{x}(t)$ ,  $t \mapsto z(t)$  должны удовлетворять уравнениям

$$(6.3) \quad \Sigma_2 : \begin{cases} d\bar{x}(t) = A_{cl}\bar{x}(t) dt + B_{cl}v(t) dt + A_{cl}^0\bar{x}(t)dw_0(t) + \\ + B_{cl}^0v(t)dw_1(t) + A_{cl}^1\bar{x}(t) dw_2(t) + B_{cl}^1v(t) dw_2(t), \\ z(t) = C_{cl}\bar{x}(t) + D_{cl}v(t), \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

Непосредственно устанавливаются формулы, выражающие коэффициенты уравнений замкнутой системы  $\Sigma_2$ . См., например, [34].

Основной результат теории динамического регулятора по выходному сигналу сформулируем в следующей теореме.

*Теорема 3. Для системы (6.1) и  $\gamma > 0$  следующие утверждения равносильны: (i) Существует регулятор (6.2) такой, что замкнутая им система (6.3) внутренне устойчива и выполнено ограничение  $\|H_{zv}\|_\infty < \gamma$ . (ii) Существует матричная функция  $P : t \mapsto P(t) \prec 0$ , такая что  $\mathcal{M}(\gamma, P) \succ 0$  для всех  $t \in [0, T]$ .*

См. теорему 3.3 в [7]. Здесь  $\mathcal{M}(\gamma, P)$  – блочная  $2 \times 2$ -матрица квадратичной формы в пространстве пар векторов  $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ v \end{pmatrix}$ .

Для последующего удобно записать условие  $\mathcal{M}(\gamma, P) \succ 0$  в эквивалентной форме, заменив блочно-диагональную матрицу  $\text{diag}\{\mathcal{M}(\gamma, P), I\}$  блочной  $3 \times 3$  матрицей  $T\mathcal{N}(\gamma, P)T' \succ 0$ , где

$$\mathcal{N}(\gamma, P) = \begin{pmatrix} PA_{cl} + A'_{cl}P + S_{11} & PB_{cl} + S_{12} & C'_{cl} \\ B'_{cl}P + S_{21} & \gamma^2 I + S_{22} & D'_{cl} \\ C_{cl} & D_{cl} & I \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} I & O & -C'_{cl} \\ O & I & -D'_{cl} \\ O & O & I \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $S_{ij}$  определены в [34]. Для блоков-подматриц  $N_{ij}$  неотрицательно определенной матрицы  $\mathcal{N}(\gamma, P)$  там получены формулы

$$\begin{aligned} N_{11} &= P(A^0 + B^I M_k C^I) + (A^0 + B^I M_k C^I)' P + S_{11}, \\ N_{12} &= P(B^0 + B^I M_k D_{21}^0 + S_{12}), \quad N_{13} = (C^0 + D_{12}^0 M_k C^I)', \\ N_{22} &= \gamma^2 I + S_{22}, \quad N_{23} = (D_{11} + D_{12}^0 M_k D_{21}^0)', \quad N_{33} = I, \end{aligned}$$

где  $M_k = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix}$  – матрица параметров динамического регулятора. Матрицы  $A_{cl}$ ,  $B_{cl}$ ,  $C_{cl}$ ,  $D_{cl}$  получают представление через матрицу  $M_k$ ; соответствующие формулы имеют вид аффинных относительно  $M_k$  соотношений

$$\begin{aligned} A_{cl} &= A^0 + B^I M_k C^I, & B_{cl} &= B^0 + B^I M_k D_{21}^0, \\ C_{cl} &= C^0 + D_{12}^0 M_k C^I, & D_{cl} &= D_{11} + D_{12}^0 M_k D_{21}^0 \end{aligned}$$

с некоторыми матричными коэффициентами [30]. Представим матрицу  $\mathcal{N}(\gamma, P)$  в виде суммы матрицы  $\mathcal{H}$ , от  $M_k$  не зависящей, и двух матриц, линейно зависящих от  $M_k$ . Получим сумму  $\mathcal{H} + \mathcal{Q}' M_k' \mathcal{R} + \mathcal{R}' M_k \mathcal{Q}$  с некоторыми матрицами  $\mathcal{Q}$  и  $\mathcal{R}$  и неотрицательно определенной матрицей  $\mathcal{H}$ . Согласно полученному в [7] стохастическому обобщению *леммы о проекции* из теории линейных матричных неравенств (см. [35]), *линейное матричное неравенство*

$$\mathcal{H} + \mathcal{Q}' M_k' \mathcal{R} + \mathcal{R}' M_k \mathcal{Q} \succ O$$

имеет решение  $M_k$  тогда и только тогда, когда матрица  $\mathcal{H}$  является положительно определенной на нулевых подпространствах  $\ker \mathcal{Q}$  и  $\ker \mathcal{R}$  матриц  $\mathcal{Q}, \mathcal{R}$ .

Лемма о проекции дает необходимое и достаточное условие выполнимости условия  $\|H_{zv}\|_\infty < \gamma$ . Условие формулируется не на языке теории матричных дифференциальных уравнений, а на языке нелинейных *матричных неравенств*. Лемма не только решает вопрос об условиях допустимости регулятора  $M_k$ , но и позволяет вычислить значения  $A_k, B_k, C_k, D_k$  параметров регулятора, если они неизвестны [7].

## 7. Стохастический робастный анализ системы с параметрическим возмущением

Пусть

$$(7.1) \quad dx(t) = Ax(t)dt + A_0x(t)dw_1(t), \quad 0 < t < T$$

– номинальная стохастическая система и

$$(7.2) \quad dx(t) = (A + B\Delta C)x(t)dt + A_0x(t)dw_1(t) + B_0\Delta Cx(t)dw_2(t)$$

– ее *стохастическое* возмущение с одновременным *параметрическим* возмущением матричного параметра  $A$ . В системе (7.2) возмущающим параметром является произвольная матрица  $\Delta$  из множества  $\mathcal{D} = R^{l \times q}$  матриц размера  $l \times q$ . Номинальная система (7.1), являясь нестационарной, предполагает

ся устойчивой в следующем смысле: существует постоянная  $c > 0$  такая, что  $\mathbb{E} \int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt \leq c \|x^0\|^2$ , где  $x(\cdot) = x(\cdot, x^0)$  – траектория уравнения (7.1), начинающаяся в  $x^0 \in R^n$ . Винеровские процессы  $w_1, w_2$  независимы, возмущающая сила является процессом, мультипликативным по состоянию, величина неопределенности системы (7.2) измеряется нормой  $\|\Delta\|$  матрицы  $\Delta$ .

Пусть  $\rho > 0$  – малое число. При малых  $\|\Delta\| < \rho$  система (7.2) близка к невозмущенной (7.1) и, скорее всего, тоже устойчива. Интересно знать, каково значение  $\rho_{max}$  параметра  $\rho$ , при котором для каждого  $\Delta$  из множества  $\mathcal{D} = \{\Delta : \|\Delta\| < \rho_{max}\}$  гарантируется устойчивость системы (7.2)? Число  $\rho_{max}$  естественно называть радиусом робастной устойчивости системы (7.1) относительно неопределенностей  $\Delta \in \mathcal{D}$ . В соответствии с этим вводится следующее определение: число  $r_{\mathcal{D}} = \inf\{\|\Delta\| : \text{система (7.2) с неопределенностью } \Delta \text{ неустойчива}\}$  называется радиусом робастной устойчивости системы (7.1).

Ниже, чтобы связать задачу о робастной устойчивости с задачей анализа  $H_\infty$ -теории (в основе анализа лежит стохастическая  $BR$ -лемма о вещественной ограниченности), обратимся к стандартному объекту билинейной стохастической  $H_\infty$ -теории:

$$(7.3) \quad \begin{cases} dx(t) = Ax(t)dt + Bv(t)dt + A_0x(t)dw_1(t) + B_0v(t)dw_2(t), \\ z(t) = Cx(t). \end{cases}$$

Интерпретируя  $v$  как управление, рассмотрим в цепи обратной связи блок с входным сигналом  $z$  и выходным сигналом  $v = \Delta z$ . Замкнутая система примет вид возмущенной системы (7.2). С этой системой в  $H_\infty$ -теории ассоциируется оператор возмущения  $L : v \mapsto z$ , задающий действие внешнего возмущения (здесь – управления)  $v$  на выходной сигнал  $z$ . Оператор  $L$  действует из пространства функций  $v(\cdot)$  в пространство функций  $z(\cdot) = Cx(\cdot)$ , где  $x(\cdot) = x(\cdot, v, x^0)|_{x^0=0}$ . Таким образом,  $L : v(\cdot) \mapsto Cx(\cdot, v, 0)$ .

Приведенное определение радиуса робастной устойчивости обобщается на нестационарные и нелинейные неопределенности. Пусть  $\Delta(t, \cdot)$  при каждом  $t \in R_+$  является отображением  $R^q \rightarrow R^l$ , которое линейно ограничено, т.е.  $\|\Delta(t, y)\| \leq K \|y\|$  при некотором  $K > 0$  для всех  $t \in R_+$  и  $y \in R^q$ , и ограничено по Липшицу, т.е. для любого  $T > 0$  найдется постоянная  $L(T)$  такая, что  $\|\Delta(t, y_1) - \Delta(t, y_2)\| \leq L(T) \|y_1 - y_2\|$  для всех  $y_1, y_2 \in R^q$  и всех  $t \in [0, T]$ . Неопределенность  $\Delta$  такого вида является нелинейной и нестационарной. Величина ее находится как наименьшее  $K$  в определении линейной ограниченности, а уравнение, ассоциированное с такой неопределенностью, записывается в виде

$$(7.4) \quad dx(t) = (Ax(t) + B\Delta(t, Cx(t)))dt + A_0x(t)dw_1(t) + B_0\Delta(t, Cx(t))dw_2(t).$$

Пусть  $\mathcal{D}_{tn}$  – множество всех таких неопределенностей. Решение уравнения (7.4), по предположению единственное в классе случайных функций  $L^2([0, T]; L^2(\Omega, R^n))$ , обозначим через  $x_\Delta(\cdot, x^0)$  и систему (7.4) назовем устойчивой, если ее решения удовлетворяют условию  $\int_0^\infty \mathbb{E} \|x_\Delta(t, x^0)\|^2 dt \leq c \|x^0\|^2$

для некоторой постоянной  $c$ . В  $H_\infty$ -теории требуется обеспечить  $\|L_{zv}\| < \gamma$ , а в теории робастных систем – обеспечить  $\|\Delta_{vz}\| < \rho$ . Значение параметра  $\gamma$  выбираем как можно меньшим, значение  $\rho$  – как можно большим.

В силу условий линейной и липшицевой ограниченности функции  $\Delta$  уравнение (7.4) имеет единственное решение  $x_\Delta(\cdot, x^0)$ , являющееся стохастическим процессом с ограниченными вторыми моментами [36]. В интегральной форме уравнение (7.4) записывается в виде

$$x_\Delta(t) = x^0 + \int_0^t (Ax_\Delta(s) + Bv_\Delta(s))ds + \int_0^t [A_0x_\Delta(s) B_0v_\Delta(s)]dw(s), \quad t \in [0, T]$$

для каждого  $T > 0$ , где  $v_\Delta(\cdot) = \Delta(\cdot, Cx_\Delta(\cdot))$ ,  $w(s) = [w_1(s), w_2(s)]'$ . Пусть  $\|\Delta\| < \|L_{zv}\|^{-1}$ , тогда существует число  $\gamma > \|L_{zv}\|$  такое, что  $\gamma\|\Delta\| < 1$ . В  $H_\infty$ -теории для функционала

$$J_T(x^0, v) = \int_0^T \mathbb{E}[\gamma^2\|v(t)\|^2 - \|z(t)\|^2]dt$$

известна формула

$$(7.5) \quad \begin{aligned} J_T(x^0, v) = & \langle x^0, P(0)x^0 \rangle - \mathbb{E}\langle x(T), P(T)x(T) \rangle + \\ & + \int_0^T \mathbb{E}\left\langle \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, M(P(t)) \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt. \end{aligned}$$

Согласно стохастической  $BR$ -лемме для любого  $\gamma > 0$  равносильны утверждения: (i) существует матрица  $P \prec 0$ , такая что  $M(P) \succ 0$ , и (ii) уравнение для  $x(\cdot)$  внутренне устойчиво, при этом  $\|L_{zv}\| < \gamma$ . Из  $M(P) \succ 0$  следует  $M(P) \succeq \delta^2 I$  для некоторого числа  $\delta > 0$ . Вычисляя  $J_T(x^0, v)$  в (7.5) для  $x(\cdot) = x_\Delta(\cdot, x^0)$  и  $v(\cdot) = v_\Delta(\cdot)$ , находим

$$(7.6) \quad J_T(x^0, v_\Delta) = \int_0^T \mathbb{E}[\gamma^2\|\Delta(t, Cx_\Delta(t))\|^2 - \|Cx_\Delta(t)\|^2]dt.$$

Сформулируем теперь важный результат об устойчивости неопределенной системы (7.4).

*Теорема 4. Пусть при  $\Delta = 0$  система (7.1) устойчива и при  $\Delta \neq 0$  неопределенность  $\Delta$  удовлетворяет условию  $\|\Delta\| = \sup\{\|\Delta(t, y)\|/\|y\| : t > 0, y \in R^q, y \neq 0\} < \|L\|^{-1}$  (здесь  $L = L_{zv}$ ). Тогда возмущенная (неопределенная) система (7.4) устойчива. В частности,  $r_{D_{in}} \geq \|L\|^{-1}$ .*

Действительно, поскольку

$$\gamma^2\|\Delta(t, Cx_\Delta(t))\|^2 \leq \gamma^2\|\Delta\|^2\|Cx_\Delta(t)\|^2 \leq \gamma^2\|Cx_\Delta(t)\|^2$$

в силу условия  $\|L\|\|\Delta\| < \gamma\|\Delta\| < 1$ , из (7.6) получаем  $J_T(x^0, v_\Delta) \leq 0$ . Аналогично, вычисляя в правой части формулы (7.5), записанной для  $x(\cdot) = x_\Delta(\cdot, x^0)$  и  $v(\cdot) = v_\Delta(\cdot)$ , интеграл от квадратичной формы с матрицей  $M(P) \succeq \delta^2 I$ , находим следующую его оценку:

$$\int_0^T \delta^2 \mathbf{E} \{ \|x_\Delta(t)\|^2 + \|v_\Delta(t)\|^2 \} dt \geq \int_0^T \delta^2 \mathbf{E} \|x_\Delta(t)\|^2 dt.$$

Тем самым из (7.5) для  $x(\cdot) = x_\Delta(\cdot, x^0)$  и  $v(\cdot) = v_\Delta(\cdot)$  получаем неравенство

$$\mathbf{E} \langle x_\Delta(T), (-P)x_\Delta(T) \rangle \leq \langle x_0, (-P)x_0 \rangle - \int_0^T \delta^2 \mathbf{E} \|x_\Delta(t)\|^2 dt$$

для любого  $T > 0$ . В этом неравенстве левая часть положительна в силу  $-P \succ 0$ , поэтому  $\int_0^T \delta^2 \mathbf{E} \|x_\Delta(t)\|^2 dt \leq \|P\|\|x^0\|^2 / \delta^2$ . Это доказывает, что система (7.4) устойчива.

Теперь нетрудно убедиться, что возмущенная, замкнутая обратной связью система, полученная подстановкой  $v = \Delta z$  в уравнение (7.3), может быть приведена к виду

$$d\bar{x}(t) = (A_{cl} + B_{cl}\Delta C_{cl})\bar{x}(t)dt + (A_{cl}^0 dw_1(t) + B_{cl}^0 \Delta C_{cl} dw_2(t)) \bar{x}(t)$$

( $\bar{x} := (x, \hat{x})$ ) с легко вычисляемыми коэффициентами, отмеченными нижним индексом  $cl$  от *closed*. Отсюда и из теорем 3 и 4 непосредственно следует

*Лемма 6. Пусть  $\gamma_{opt}$  есть инфимум тех  $\gamma \geq 0$ , для которых существует динамический регулятор, обеспечивающий внутреннюю устойчивость замкнутой системы (7.4) и выполнение для нее условия  $\|L_{cl}\| < \gamma$ . Тогда для любого  $\gamma > \gamma_{opt}$  найдется регулятор  $\Delta$  такой, что замкнутая им система (7.4) имеет радиус робастной устойчивости  $r_{\mathcal{D}}(A_{cl}, B_{cl}, C_{cl}, A_{cl}^0, B_{cl}^0) > \gamma^{-1}$ .*

Подробности см. в [7].

## 8. Заключение

Темой статьи заявлен раздел  $H^2/H_\infty$  общей теории управления техническими системами. В этом разделе решаются, во-первых, задачи *анализа* регулятора и, во-вторых, – задачи его *синтеза*, т.е. его оптимизации в классе *допустимых*, выявленном на этапе анализа. Теория  $H_\infty$  решает задачу подавления внешнего возмущения, действующего на объект, замкнутый допустимым регулятором. Допустимый регулятор обеспечивает, во-первых, устойчивость замкнутой им системы “объект плюс регулятор” и, во-вторых, гарантирует, что норма оператора  $H_\infty$  передачи внешнего возмущения  $v$  на регулируемый выходной сигнал  $z$  не превысит величины  $\gamma > 0$ , априори заданной конструктором:  $\|H_{zv}\|_\infty < \gamma$ . Регулятор предполагается заданным в виде функционального отображения  $K : y \mapsto u$  наблюдаемого, измеренного шумовым

датчиком, выходного сигнала  $y$  на сигнал управления  $u$ . В такой постановке задачи система должна иметь два входа  $v, u$  и два выхода  $z, y$ . Далее, система должна быть стохастической, заданной стохастическим уравнением Ито, диффузионный член которого не произволен, а имеет частную, мультипликативную структуру, которая, однако, не то же, что структура в линейном уравнении Ито. Стохастический характер системы обусловлен не только тем, что стохастическими являются внешнее возмущение и/или наблюдаемый выход. Даже номинальная, невозмущенная, при нулевых внешних возмущениях система предполагается стохастической. Стандартной же моделью стохастической системы является в  $H_\infty$ -теории возмущенная система. И возмущена номинальная система двумя стохастическими силами: силой  $B_1 v dt$  (которая может быть и детерминированной) и собственно стохастической силой  $B_0 v dw_2$ . Наличие обоих типов возмущений – существенный момент наиболее полного обобщения  $H_\infty$ -теории. Так обстоит дело с постановкой задачи об  $H_\infty$ -регуляторе в статистической теории  $H^2/H_\infty$ -управления.

С другой стороны, в теории робастного управления занимаются исследованием систем с неопределенностями, их робастной устойчивостью, определением радиуса устойчивости замкнутой регулятором системы. Возникает вопрос: “В каком отношении находятся друг к другу теории о регуляторе для стохастических систем в робастном управлении и в  $H_\infty$ -теории?”. Подробный ответ на этот вопрос дан в разделе 7 статьи. Оказывается, в  $H_\infty$ -теории интерес представляют оператор  $H_{zv} : v \mapsto z$  и его индуцированная норма, в робастной же теории – оператор  $\Delta : z \mapsto v$  и его норма  $\|\Delta\|$ , играющая решающую роль в определении радиуса устойчивости системы с неопределенностями. Различные аспекты линейной теории стохастических робастных систем отражены в монографии [37].

Изложенная в обзоре теория мультипликативных стохастических систем является некоторым обобщением линейной теории, поскольку диффузионный член в уравнении состояния взят здесь мультипликативным, а не линейным. Нестандартный подход к теории гауссовских систем изложен в разделе 4 этой статьи. Следует отметить и интересные, представленные в обзоре результаты стохастической теории регуляторов по наблюдаемому выходному сигналу  $y$ . Здесь приходится перейти к расширенной системе с вектором состояния  $\bar{x} = (x, \hat{x})$ , где  $\hat{x}$  – вектор состояния регулятора, вычисляемый по выходу  $y$ . После этого теорию такого регулятора интересно сопоставить с теорией детерминированного регулятора и регулятора по вектору состояния  $x$ .

Обратим внимание на возможные направления дальнейшего развития стохастической теории  $H^2/H_\infty$ -управления и ее обобщений: назовем работы по теории управления для стационарных систем с ограниченными спектральными характеристиками [38], некоторых классов нелинейных систем [39], как робастных [40], так и неробастных, систем с негауссовскими неопределенностями [41], с неполной информацией о векторе состояния [42, 43]. Продолжаются работы по теории управления дискретными системами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zames G.* Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses // IEEE Trans. Automat. Control. 1981. V. AC-26. P. 301–320.
2. *Doyle J., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.* State space solutions to standard  $H_2$  and  $H^\infty$  control problems // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. AC-34. P. 831–847.
3. *Francis B.A.* A course in  $H_\infty$  control theory. Lecture Notes in Control and Information Sciences. V. 88. New York: Springer-Verlag, 1987.
4. *Doyle J., Zhou K., Glover K., Bodenheimer B.* Mixed  $H^2$  and  $H_\infty$  performance objectives II: Optimal control // IEEE Trans. Automat. Control. 1994. V. 39. P. 1575–1587.
5. *Glover K., Doyle J.* State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an  $H_\infty$  norm bound and relations to risk sensitivity // Syst. Contr. Lett. 1988. V. 11. P. 167–172.
6. *Limebeer D.J.N., Anderson B.D.O., Khargonekar, Green M.* A Game Theoretic Approach to  $H_\infty$  Control for Time-Varying Systems // SIAM J. Control Optim. 1992. V. 30. P. 262–283.
7. *Hinrichsen D., Pritchard A.J.* Stochastic  $H_\infty$  // SIAM J. Control Optim. 1998. V. 36. No. 5. P. 1504–1538.
8. *Petersen I.R., Ugrinovskiy V.A., Savkin F.V.* London: Springer, 2006.
9. *Шайкин М.Е.* Мультипликативные стохастические системы. Оптимизация и анализ // Дифференциальные уравнения. 2017. Том 53. № 3. С. 1–16.
10. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений М.: Наука, 1978.
11. *Шайкин М.Е.* Резольвенты дифференциальных уравнений Ито, мультипликативных по вектору состояния // АИТ. 2023. Т. 59. № 12. С. 171–190.
12. *Ватанабэ С., Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы М.: Наука, 1986.
13. *Erdogan U., Lord G.J.* A New Class of Exponential Integrators for Stochastic Differential Equations with Multiplicative Noise // arXiv:1608.07096v2. 2016.
14. *Hochbruck M., Ostermann A.* Exponential Integrators // Acta Numerica. 2010. No. 19. P. 209–286.
15. *Mora C.M.* Weak Exponential Schemes for Stochastic Differential Equations with Additive Noise // IMA J. Numer. Anal. 2005. V. 25. No. 3. P. 486–506.
16. *Jimenez J.C., Carbonell F.* Convergence Rate of Weak Local Linearization Schemes for Stochastic Differential Equations with Additive Noise // J. Comput. Appl. Math. 2015. V. 279. P. 106–122.
17. *Komori Y., Burrage K.* A Stochastic Exponential Euler Scheme for Simulation of Stiff Biochemical Reaction Systems // BIT. 2014. V. 54. No. 4. P. 1067–1085.
18. *Lord G.J., Tambue A.* Stochastic Exponential Integrators for the Finite Element Discretization of SPDEs for Multiplicative and Additive Noise // IMECO. Numer. Anal. 2012. drr059.
19. *Мельникова И.В., Альшанский М.А.* Стохастические уравнения с неограниченным операторным коэффициентом при мультипликативном шуме // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 6. С. 1354–1371.

20. *Green M., Limebeer D.J.N.* Linear Robust Control / NJ. Prentice-Hall. Englewood Cliffs, 1995.
21. *Petersen I.R., Anderson B.D.O., Jonckheere E.A.* A first principles solution to the non-singular  $H^\infty$  control problem // Int. J. Robust Nonlin. Control. 1991. V. 1. No. 3. P. 171–185.
22. *Basar T., Bernhard P.*  $H^\infty$ -optimal control and related minimax design problems: a dynamic game approach Boston. Birkhauser. 1995.
23. *Sampei M., Mita T., Nakamichi M.* An algebraic approach to  $H^\infty$  output feedback control problems // Syst. Control Lett. 1990. V. 14. P. 13–24.
24. *Bernstein D.S., Haddad W.M.* Robust stability and performance analysis for state-space systems via quadratic Lyapunov bounds // SIAM J. Matrix Anal. 1990. V. 11. No. 2. P. 239–271.
25. *Runolfsson T.* The equivalence between infinite-horizon optimal control of stochastic systems with exponential-of-integral performance index and stochastic differential games // IEEE Trans. Automat. Control. 1994. V. 39. No. 8. P. 1551–1563.
26. *Jacobson D.H.* Optimal stochastic linear systems with exponential performance criteria and their relation to deterministic differential games // IEEE Transact. Autom. Control. 1973. V. 18. No. 2. P. 124–131.
27. *Bensoussan A., van Schuppen J.H.* Optimal control of partially observable stochastic systems with an exponential-of-integral performance index // SIAM J. Control. Optim. 1985. V. 23. P. 599–613.
28. *Pan Z., Basar T.* Model simplification and optimal control of stochastic singularly perturbed systems under exponentiated quadratic cost // SIAM J. Control. Optim. 1996. V. 34. No. 5. P. 1734–1766.
29. *Гирсанов И.В.* О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры // Теория вероятн. и ее применение. 1960. Т. 5. № 3. С. 314–330.
30. *Zhou K., Doyle J., Glover J.* Robust and Optimal Control. NJ. Prentice-Hall. Upper Saddle River. 1996.
31. *Ugrinovskii V.A., Petersen I.R.* Absolute stabilization and minimax optimal control of uncertain systems with stochastic uncertainty // SIAM J. Control Optim. 1999. V. 37. No. 4. P. 1089–1122.
32. *Ichikawa A.* Quadratic games and  $H_\infty$ -type problems for time varying systems // Int. J. Contr. 1991. V. 54. No. 5. P. 1249–1271.
33. *Bensoussan A.* Stochastic control of partially observable systems Cambridge. Cambridge University Press, 1992.
34. *Шайкин М.Е.* Анализ динамического регулятора по выходному сигналу для стохастических систем мультипликативного типа // АиТ. 2021. Т. 57. № 3. С. 122–134.
35. *Gahinet P., Apkarian P.* A Linear Matrix Inequality Approach to  $H^\infty$  Control // Int. J. Robust Nonlin. Control. 1994. V. 4. P. 421–448.
36. *Крылов Н.В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977.
37. *Dragan V., Morozan T., Stoica A.M.* Mathematical methods in robust control of linear stochastic systems. Mathematical concepts and methods in science and engineering. SPRINGER, 2006.

38. *Ma P., Zhu Z., Sheng L.* Static output feedback  $H^2/H_\infty$  control with spectrum constraints for stochastic systems // Syst. Sci. Control Eng. 2018. V. 6. No. 3. P. 118–125.
39. *Paulson J.A., Mesbah A.* An efficient method for stochastic optimal control with joint chance constraints for nonlinear systems // Int. J. Robust Nonlin. Control. 2019. V. 29. No. 15. P. 5017–5037.
40. *Lefebvre T., De Belie F., Crevecoeur G.* A framework for robust quadratic optimal control // Opt. Control Appl. Methods. 2020. V. 41. No. 3. P. 833–848.
41. *Wan Y., Shen D.E., Lusia S., Findeisen R., Braatz R.D.* Polynomial chaos-based  $H^2$  output-feedback control of systems with probabilistic parameter uncertainties // Automatica. 2021. V. 131. Article 109743.
42. *Пантелеев А.В., Яковлева А.А.* Синтез  $H_\infty$ -регуляторов на конечном промежутке времени // Моделирование и анализ данных. 2021. Т. 11. № 1. С. 5–19.
43. *Wang M., Meng Q., Shen Y., Shi P.* Stochastic  $H^2/H_\infty$ -Control for Mean-Field Stochastic Differential Systems with  $(x, u, v)$ -Dependent Noise // J. Optim. Theory Appl. 2019. Springer. V. 197(3). P. 1024–1060.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакиным.*

Поступила в редакцию 03.03.2024

После доработки 29.09.2024

Принята к публикации 02.10.2024

## Управление в технических системах

© 2025 г. В.С. ВЕРБА, чл.-корр. РАН (vvs.msk@gmail.com),  
В.И. МЕРКУЛОВ, д-р техн. наук (mvipost41@gmail.com)  
(АО «Концерн «Вега», Москва),  
А.Р. Ильчук, д-р техн. наук (arilchuk@istokmw.ru)  
(АО «НПП «Исток» им. Шокина», Фрязино)

### ПОДХОДЫ К ОПТИМИЗАЦИИ МЕТОДОВ НАВЕДЕНИЯ НА ВЫСОКОСКОРОСТНЫЕ ИНТЕНСИВНО МАНЕВРИРУЮЩИЕ ЦЕЛИ. ЧАСТЬ 3. ОПТИМИЗАЦИЯ НАВЕДЕНИЯ С УЧЕТОМ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПЕРЕХВАТЧИКОВ

Рассмотрены процедуры синтеза методов наведения на объект, маневрирующий по сложному закону. Процедуры адаптированы под динамические свойства перехватчика, реализуемые за счет трансформации состава информационного обеспечения и использования результатов прогноза пространственного положения цели. Приведены результаты моделирования.

*Ключевые слова:* метод наведения, оптимизация управления, трансформация информационного обеспечения, прогноз положения цели.

DOI: 10.31857/S0005231025020047, EDN: IQRQСХ

#### 1. Введение

Анализ традиционных методов самонаведения [1–4], наиболее распространенными среди которых являются метод пропорционального наведения и наведения в упрежденную точку встречи, позволяет прийти к заключению, что они синтезировались автономно без учета динамических свойств ЛА-перехватчиков (где ЛА – летательный аппарат) при условии, что цель не маневрирует.

Такой подход при реализации систем перехвата неманеврирующих и слабоманеврирующих целей не накладывает каких-либо существенных ограничений на свойства ЛА-перехватчиков (кроме максимально допустимой перегрузки). Однако при перехвате интенсивно маневрирующих целей такой подход не обеспечивает нужных показателей перехвата, требуя улучшения маневренных свойств ЛА-перехватчика, адаптируя их под сложный характер изменения координат относительного и абсолютного движения цели.

В свою очередь, это требует больших временных и материальных затрат и не может быть универсальным приемом из-за широкого спектра возможных маневров целей.

В связи с этим весьма востребованной является разработка способов оптимизации, учитывающих динамические свойства перехватчиков.

Актуальность решения этой задачи возрастает в связи с расширением номенклатуры высокоскоростных летательных аппаратов (ВСЛА), способных маневрировать по сложным законам, в том числе и со сменой величины и знаков производных угловых координат [4]. В связи с этим весьма востребована разработка методов оптимизации, способных сформировать законы управления, учитывающие динамические свойства носителей средств перехвата [5, 6, 8, 9].

В общем случае учет инерционности перехватчика может быть осуществлен различными способами:

- взвешиванием коэффициентов ошибок управления в соответствии с постоянной времени носителя и коэффициентом передачи сигналов управления носителя, что характерно для оптимизации по классическим методам статистической теории оптимального управления [5, 6];
- учетом несоответствия динамических свойств цели и перехватчика непосредственно в законе наведения [5, 6];
- формированием законов наведения с нелинейной (кубической) зависимостью от комбинаций ошибок управления, косвенно учитывающих инерционность носителя [5, 6];
- трансформацией воздействующих на носитель входных сигналов, адаптированной под оптимизацию его конкретного типа, расширяющей число корректирующих поправок;
- путем формирования закона наведения по результатам прогноза положения цели на интервал времени, определяемый инерционностью носителя.

Необходимо отметить, что первые три способа подробно рассмотрены в [5, 6].

Целью статьи является рассмотрение способов оптимизации, основанных на трансформации входных сигналов и использовании результатов прогноза пространственного положения цели.

## **2. Оптимизация методов наведения на основе трансформации входных сигналов**

Суть рассматриваемого способа состоит в искусственном увеличении числа корректирующих входных сигналов, в той или иной степени компенсирующих инерционность перехватчика с конкретными летно-техническими характеристиками.

Такой подход требует изменения только алгоритмов информационного обеспечения, не затрагивая сам ЛА-перехватчик.

Необходимо отметить, что требуемое преобразование входных сигналов, обеспечивающее дальнейшую оптимизацию системы наведения, может быть

получено при использовании алгоритмов статистической теории оптимального управления [1, 3].

В наиболее простом варианте, основанном на локальной оптимизации [1], она позволяет для системы с заданной частью

$$(2.1) \quad \dot{\mathbf{x}}_y(t) = \mathbf{F}_y \mathbf{x}_y(t) + \mathbf{B}_y \mathbf{u}(t) + \xi_y(t),$$

предназначенной для обработки многомерного процесса

$$(2.2) \quad \dot{\mathbf{x}}_T(t) = \mathbf{F}_T \mathbf{x}_T(t) + \xi_T(t),$$

при наличии наблюдений

$$(2.3) \quad \mathbf{z}(t) = \mathbf{H} \mathbf{x}(t) + \xi_z(t)$$

найти закон управления

$$(2.4) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_y \mathbf{Q} [\hat{\mathbf{x}}_T(t) - \hat{\mathbf{x}}_y(t)],$$

оптимальный по минимуму функционала качества

$$(2.5) \quad I = M \left\{ [\mathbf{x}_T(t) - \mathbf{x}_y(t)]^T \mathbf{Q} [\mathbf{x}_T(t) - \mathbf{x}_y(t)] + \int_0^t \mathbf{u}^T(t) \mathbf{K} \mathbf{u}(t) dt \right\}.$$

Здесь:  $\mathbf{x}_y$  и  $\mathbf{x}_T$  –  $n$ -мерные векторы состояния;  $\mathbf{F}_y$  и  $\mathbf{F}_T$  – матрицы внутренних связей процессов (2.1) и (2.2);  $\mathbf{u}$  –  $r$ -мерный ( $r \leq n$ ) вектор управления;  $\mathbf{B}_y$  – матрица эффективности сигналов управления;  $\mathbf{z}$  –  $m$ -мерный ( $m \leq 2n$ ) вектор измерений сигналов управления;  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_T^T \mathbf{x}_y^T]^T$  – составной вектор;  $\mathbf{H}$  – матрица связи  $\mathbf{z}$  и  $\mathbf{x}$ ;  $\xi_y$ ,  $\xi_T$  и  $\xi_z$  – векторы шумов состояния (2.1), (2.2) и измерений (2.3),  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{K}$  – матрицы штрафов за точность и экономичность функционирования;  $t$  – текущее время;  $M\{\bullet\}$  – математическое ожидание при условии, что имеются измерения (2.3);  $\hat{\mathbf{x}}_y$  и  $\hat{\mathbf{x}}_T$  – оптимальные оценки (2.1) и (2.2).

В общем случае совершенство любой системы управления, определяемое ее способностью реагировать на изменения входного воздействия, обусловлено числом обратных связей и наличием корректирующих сигналов. При этом число возможных обратных связей определяется размерностью заданной части (2.1), а число корректирующих сигналов зависит от размерности используемого вектора входных воздействий (2.2).

Цель раздела 2 – оценить возможность разработки метода наведения летательных аппаратов на интенсивно маневрирующие цели, основанного на трансформации входных сигналов.

### 2.1. Синтез закона управления

В математическом плане решаемая задача синтеза формулируется следующим образом.

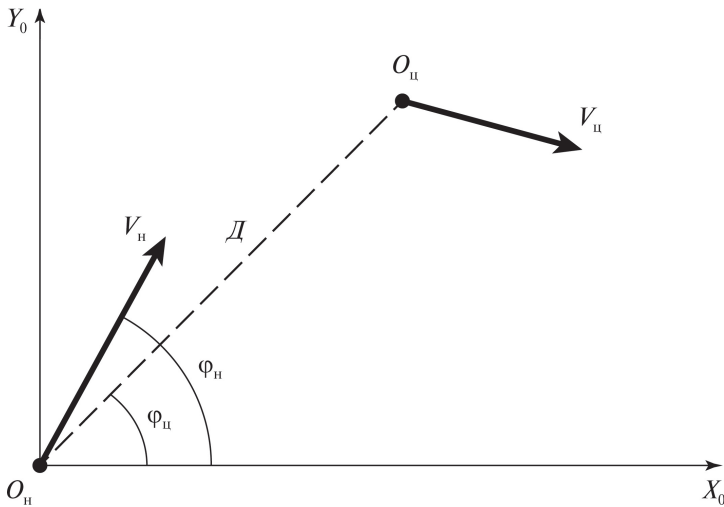


Рис. 1. Геометрия взаимного расположения цели и перехватчика в декартовой системе координат.

Для носителя, определяемого упрощенной моделью ЛА [6]

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \dot{\varphi}_n &= \omega_n, & \varphi_n(0) &= \varphi_3; \\ \dot{\omega}_n &= -\frac{1}{T_n}\omega_n + \frac{b}{T_n}u, & \omega_n(0) &= \omega_3, \end{aligned}$$

предназначенного для наведения на объект, движущийся по закону

$$(2.7) \quad \varphi_{ц} = f(t), \quad \varphi_{ц}(0) = \varphi_{ц0},$$

где  $f(t)$  – гладкая функция, дифференцируемая  $n_T$  раз ( $n_T > 2$ ), по измерениям

$$(2.8) \quad \varphi_n = \varphi_{ц} + \xi_n,$$

необходимо найти сигнал  $u$  управления ЛА-перехватчиком, оптимальный по минимуму функционала (2.5), обеспечивающий перехват объекта, маневрирующего по сложной траектории со сменой знака производной  $\varphi_{ц}$  (2.7) с промахом  $h$ , не превышающим допустимое значение  $h_{доп}$ .

В выражениях (2.6)–(2.8):  $\varphi_{ц}$  и  $\varphi_n$  – соответственно пеленг цели и угол направления полета перехватчика с начальными значениями  $\varphi_{ц0}$  и  $\varphi_3$ ;  $\omega_{ц} = \dot{\varphi}_{ц}$  и  $\omega_n$  – угловые скорости линии визирования цели и направления полета перехватчика соответственно с начальными значениями  $\omega_{ц0}$  и  $\omega_3$ ;  $b$  и  $T_n$  – коэффициент усиления и постоянная времени перехватчика, характеризующие его динамические свойства;  $u$  – сигнал управления. В формулах (2.6)–(2.8) и в дальнейшем для упрощения записей опускается зависимость переменных от времени.

Геометрические соотношения между углами для вертикальной плоскости показаны на рис. 1.

На этом рисунке  $O_{\text{ц}}$  – точка расположения цели,  $\mathbf{V}_{\text{ц}}$  и  $\mathbf{V}_{\text{н}}$  – векторы скорости цели и перехватчика,  $\varphi_{\text{ц}}$  – угол визирования цели,  $\varphi_{\text{н}}$  – угол, характеризующий направление полета носителя.

Для реализации сложной траектории движения перехватываемого объекта [4] в его модели (2.7) должны учитываться высокие производные угла визирования  $\varphi_{\text{ц}}$ .

Для определенности представим входное воздействие (2.7) в виде вектора четвертого порядка:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \dot{\varphi}_{\text{ц}} &= \omega_{\text{ц}}, & \varphi_{\text{ц}}(0) &= \varphi_{\text{ц}0}; \\ \dot{\omega}_{\text{ц}} &= a_{\text{ц}}, & \omega_{\text{ц}}(0) &= \omega_{\text{ц}0}; \\ \dot{a}_{\text{ц}} &= \ddot{\omega}_{\text{ц}} = j_{\text{ц}}, & a_{\text{ц}}(0) &= a_{\text{ц}0}; \\ \dot{j}_{\text{ц}} &= \ddot{\omega}_{\text{ц}} = 0, & j_{\text{ц}}(0) &= j_{\text{ц}0}, \end{aligned}$$

дополнив модель заданной части (2.6) двумя уравнениями

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \dot{a}_{\text{н}} &= 0, & a_{\text{н}}(0) &= 0; \\ \dot{j}_{\text{н}} &= 0, & j_{\text{н}}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Поставив в соответствие (2.6), (2.10) и (2.9) с (2.1), (2.2), в приложении к (2.5), получим:

$$(2.11) \quad \mathbf{x}_{\text{т}} = \begin{bmatrix} \varphi_{\text{ц}} \\ \omega_{\text{ц}} \\ a_{\text{ц}} \\ j_{\text{ц}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{\text{у}} = \begin{bmatrix} \varphi_{\text{н}} \\ \omega_{\text{н}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = u, \quad \mathbf{B}_{\text{у}} = \begin{bmatrix} 0 \\ b/T_{\text{н}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = K_{\text{н}},$$

где размерность матрицы штрафов  $\mathbf{Q}$  расширена в связи с увеличением размерности векторов  $\mathbf{x}_{\text{у}}$  и  $\mathbf{x}_{\text{т}}$ .

Необходимо подчеркнуть, что модель носителя (2.6), (2.10) не соответствует более сложной модели входного воздействия (2.9), и обработка им этого воздействия без принятия дополнительных мер будет неоптимальна.

Используя полученные выражения (2.11) в (2.4), получим:

$$(2.12) \quad u = K_{\text{н}}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \frac{b}{T_{\text{н}}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_{\text{ц}} - \hat{\varphi}_{\text{н}} \\ \hat{\omega}_{\text{ц}} - \hat{\omega}_{\text{н}} \\ \hat{\omega}_{\text{ц}} - 0 \\ \hat{\omega}_{\text{ц}} - 0 \end{bmatrix},$$

$$u_1 = \frac{bq_{21}}{K_{\text{н}}T_{\text{н}}}(\hat{\varphi}_{\text{ц}} - \hat{\varphi}_{\text{н}}) + \frac{bq_{22}}{K_{\text{н}}T_{\text{н}}}(\hat{\omega}_{\text{ц}} - \hat{\omega}_{\text{н}}) + \frac{bq_{23}}{K_{\text{н}}T_{\text{н}}}\hat{\omega}_{\text{ц}} + \frac{bq_{24}}{K_{\text{н}}T_{\text{н}}}\hat{\omega}_{\text{ц}}.$$

Анализ (2.12) позволяет сделать следующие выводы.

Трансформированный сигнал управления, воздействующий на перехватчик, отличается от типового, вытекающего из (2.6) [6], использованием дополнительных слагаемых, учитывающих производные угловой скорости  $\hat{\omega}_{ц}$  и  $\hat{\omega}_{н}$ . При этом весовые коэффициенты ошибок управления определяются параметрами  $(b/T_H)$  заданной части (2.6), ограничениями на величину сигнала управления  $(K_H)$  и значимостью отдельных слагаемых для сигнала управления в целом  $(q_{21}, q_{22}, q_{23}, q_{24})$ .

Полученный сигнал управления представляется совокупностью слагаемых, формируемых с учетом отрицательных обратных связей, число которых определяется размерностью модели заданной части (2.6), и корректирующих поправок, число которых зависит от сложности представления входных воздействий.

Для реализации требуемого закона управления необходимо иметь оценки  $\hat{\varphi}_{ц}, \hat{\omega}_{ц}, \hat{\varphi}_{н}, \hat{\omega}_{н}, \dot{\omega}_{ц}, \dot{\omega}_{н}$ , которые могут быть сформированы по различным правилам [5, 9, 10], что несколько усложняет систему сопровождения [6], однако не требует доработки носителя (2.6), обеспечивая его оптимальность по минимуму функционала (2.5).

Учет в законе управления перехватчиком более высоких производных  $\hat{\omega}_{ц}$  и  $\hat{\omega}_{н}$  предопределяет его способность сопровождать цели, движущиеся по более сложным законам.

## 2.2. Анализ эффективности закона управления

Задача исследований – определить возможности синтезированного закона управления и его упрощенных разновидностей по перехвату интенсивно маневрирующих целей.

Анализ эффективности закона управления (2.12) проводился по результатам моделирования процедуры наведения перехватчика (2.6) в передней полусфере на цель, движущуюся по сложной траектории со сменой знака производных угловых координат при условии, что все координаты состояния  $\varphi_{ц}, \omega_{ц}, \varphi_{н}, \omega_{н}, \dot{\omega}_{ц}, \dot{\omega}_{н}$ , используемые в (2.6), оцениваются идеально точно.

В процессе моделирования сравнивались результаты использования в (2.6) трех модификаций законов управления, определяющих различную степень адаптации носителя к входным воздействиям:

$u_1$  – определяемого законом (2.12);

$$(2.13) \quad u_2 = \frac{bq_{21}}{K_H T_H} (\hat{\varphi}_{ц} - \hat{\varphi}_{н}) + \frac{bq_{22}}{K_H T_H} (\hat{\omega}_{ц} - \hat{\omega}_{н}) + \frac{bq_{23}}{K_H T_H} \hat{\omega}_{ц};$$

$$(2.14) \quad u_3 = \frac{bq_{21}}{K_H T_H} (\hat{\varphi}_{ц} - \hat{\varphi}_{н}) + \frac{bq_{22}}{K_H T_H} (\hat{\omega}_{ц} - \hat{\omega}_{н}).$$

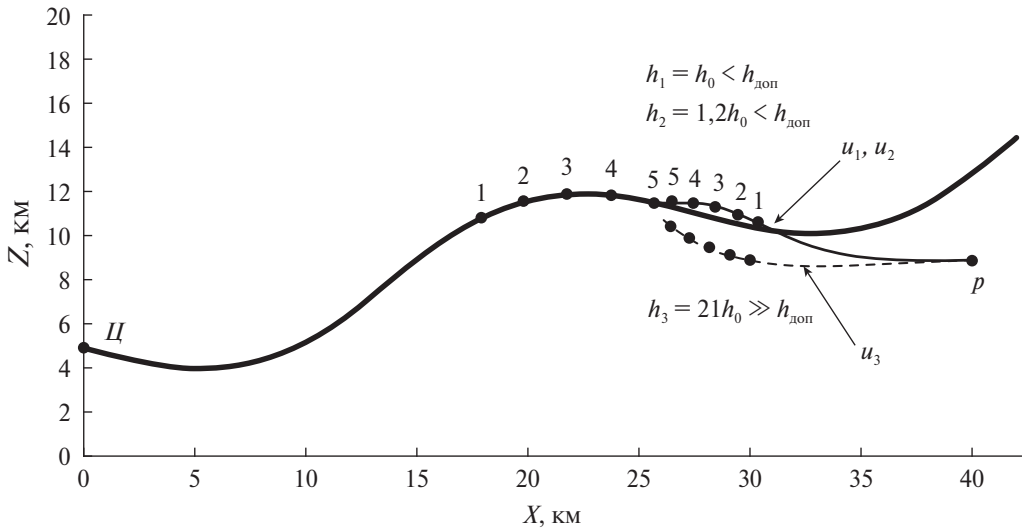


Рис. 2. Траектории цели и перехватчиков.

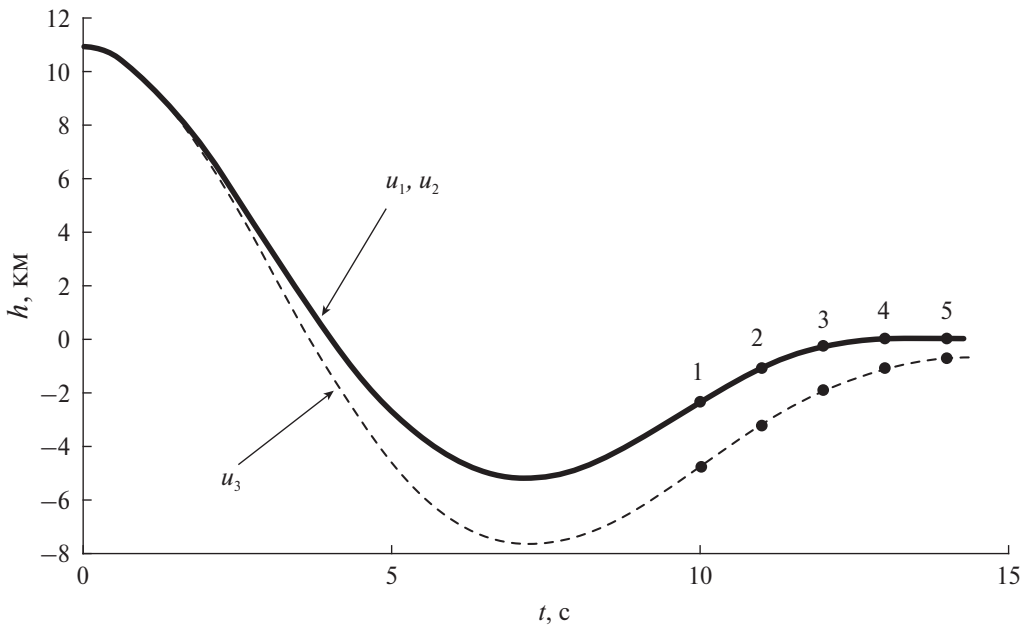


Рис. 3. Зависимость текущего промаха от времени.

Эффективность наведения оценивалась по величине текущего промаха  $h = D^2 \omega_{ц} / V_o$ , где  $D$  и  $V_o$  – дальность до цели и относительная скорость, при различных значениях постоянной времени  $T_H$ .

На рис. 2 и 3 для одного из вариантов исследований приведены траектории полета цели (Ц) и перехватчика (P), управляемых по законам (2.12), (2.13), (2.14), и соответствующие этим законам конечные и текущие промахи. Точ-

ками обозначены положения цели и перехватчиков в одинаковые моменты времени.

Из рисунков видно, что использование классического метода наведения (2.14) не обеспечивает перехват сложноманеврирующей цели, в то время как использование законов (2.12), (2.13) реализует высокоточный перехват.

Проведенные исследования показали:

- для исследуемой траектории полета цели учет в законе управления (2.12)  $\dot{\omega}_c$  имеет более высокую значимость для повышения точности наведения, чем учет  $\ddot{\omega}_c$ ;
- использование более инерционных перехватчиков ( $T_{н2} = 2T_{н1}$ ) приводит к незначительному увеличению промахов в (2.12), (2.13) и к существенному увеличению промахов в (2.14);
- аналогичные результаты имеют место при увеличении скорости цели ( $V_{ц2} = 2V_{ц1}$ ).

Комплекс проведенных исследований подтвердил работоспособность предложенного варианта оптимизации систем наведения, основанного на трансформации входного воздействия в широком диапазоне скоростей цели и инерционности перехватчика.

Манипулируя видом исходных моделей (2.7), (2.9), составом матриц штрафов  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{K}$  в (2.5), (2.11) и характером их изменения во времени, можно получить обширный набор методов наведения, в той или иной степени удовлетворяющих требованиям, изложенным в первой части статьи [7].

В качестве недостатка рассмотренного способа оптимизации необходимо отметить необходимость оценивания производных угловой скорости, что является отнюдь не тривиальной задачей, один из вариантов решения которой рассмотрен в [6].

### **3. Оптимизация наведения на основе прогноза пространственного положения цели**

В разделе 2 был рассмотрен вариант оптимизации, основанный на адаптации метода наведения под конкретный тип носителя, что существенно удешевляет процедуру разработки системы перехвата ВСЛА. Однако возможен и другой подход, основанный на адаптации носителя под конкретную разновидность метода наведения без изменения своих динамических свойств.

Суть такого подхода основана на компенсации тем или иным способом запаздывания реакции носителя на управляющее воздействие, вызываемое его инерционностью и наличием зоны нечувствительности.

На рис. 4 эти особенности качественно проиллюстрированы наличием зоны нечувствительности  $t_{нч}$ , определяющей запаздывание реакции носителя на малый управляющий сигнал (рис. 4, а), и постоянной времени  $T_n$  (рис. 4, б) в процессе изменения направления полета носителя под действием управляющего сигнала  $j_n$ .

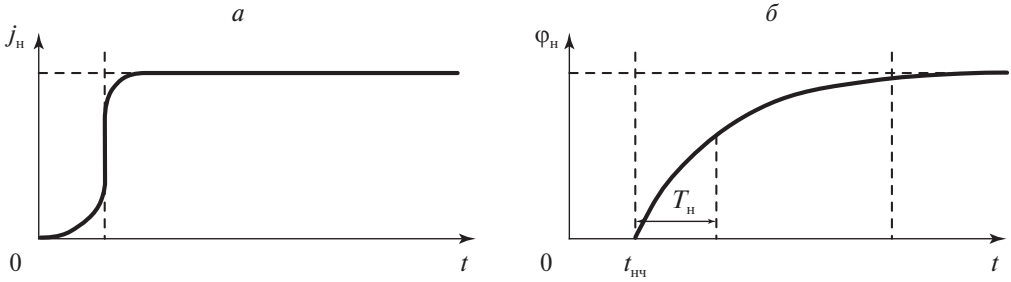


Рис. 4. Временные взаимосвязи входного воздействия – *a* и реакции на него – *б*.

Компенсация временного отставания реакции носителя на управляющее воздействие может быть осуществлена различными способами. Один из них, основанный на учете в законе управления несоответствия динамических свойств цели и перехватчика [6], эффективен только на малых расстояниях до цели. Второй, основанный на формировании ошибок управления не по текущему положению цели, а по ее прогнозу на известное время запаздывания в отработке носителем управляющих сигналов, действует на протяжении всей процедуры наведения.

Необходимо подчеркнуть, что оба подхода могут быть достаточно просто реализованы на базе локального варианта статистической теории оптимального управления (СТОУ) с учетом измеряемых возмущений [5].

В общем случае этот вариант позволяет для системы

$$(3.1) \quad \dot{\mathbf{x}}_y(t) = \mathbf{F}_y \mathbf{x}_y(t) + \mathbf{B}_y \mathbf{u}(t) + \mathbf{s}_y(t) + \xi_y(t), \quad \mathbf{x}_y(0) = \mathbf{x}_{y0},$$

предназначенной для отработки процесса

$$(3.2) \quad \dot{\mathbf{x}}_T(t) = \mathbf{F}_T \mathbf{x}_T(t) + \xi_T(t), \quad \mathbf{x}_T(0) = \mathbf{x}_{T0},$$

при наличии измерений

$$(3.3) \quad \mathbf{z}(t) = \mathbf{H} [\mathbf{x}_T^T(t) \quad \mathbf{x}_y^T(t)]^T + \xi_z(t)$$

сформировать управление

$$(3.4) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_y^T [Q (\hat{\mathbf{x}}_T(t) - \hat{\mathbf{x}}_y(t)) - \mathbf{G} \hat{\mathbf{s}}_y(t)],$$

оптимальное по минимуму функционала

$$(3.5) \quad I = M \left\{ \Delta \mathbf{x}^T(t) Q \Delta \mathbf{x}(t) + 2 \Delta \mathbf{x}^T(t) \mathbf{G} \mathbf{s}_y(t) + \mathbf{s}_y^T(t) Q \mathbf{s}_y(t) + \int_0^t \mathbf{u}^T(t) \mathbf{K} \mathbf{u}(t) dt \right\},$$

$$(3.6) \quad \Delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_T(t) - \mathbf{x}_y(t).$$

Здесь:  $\mathbf{s}_y$  и  $\hat{\mathbf{s}}_y$  –  $n$ -мерные векторы измеряемых возмущений и их оптимальных оценок,  $\mathbf{G}$  – неотрицательно определенная весовая матрица возмущений.

Цель раздела 3 – оценить возможность использования аппарата (3.1)–(3.6) для синтеза методов перехвата ВСЛА.

### 3.1. Синтез закона управления

В приложении к решаемой задаче ее постановка может быть сформулирована следующим образом. Для перехватчика

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \dot{\varphi}_н(t) &= \omega_н(t), & \varphi_н(0) &= \varphi_{н0}; \\ \dot{\omega}_н(t) &= -\frac{1}{T_н}\omega_н(t) + \frac{b}{T_н}j_н(t), & \omega_н(0) &= \omega_{н0}, \end{aligned}$$

предназначенного для перехвата ВСЛА, по результатам прогноза его пространственного положения на время  $T_{пр}$ :

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \dot{\varphi}_ц(t + T_{пр}) &= \omega_ц(t) + \dot{\omega}_ц(t)T_{пр}, & \varphi_ц(0) &= \varphi_ц(T_{пр}); \\ \dot{\omega}_ц(t + T_{пр}) &= -\frac{2\dot{D}(t)}{D(t)}\omega_ц(t) + \frac{1}{D(t)}(j_ц(t) - \dot{j}_н(t)) + \ddot{\omega}_ц(t)T_{пр}, \\ & & \omega_ц(0) &= \omega_ц(T_{пр}), \end{aligned}$$

необходимо сформировать сигнал управления  $j_н$ , оптимальный по минимуму функционала качества

$$(3.9) \quad \begin{aligned} I = M \left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \times \\ & \times \begin{bmatrix} \dot{\omega}_цT_{пр} \\ \left(\frac{1}{T_н} - \frac{2\dot{D}}{D}\right)\omega_ц + \ddot{\omega}_цT_{пр} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\omega}_цT_{пр} \\ \left(\frac{1}{T_н} - \frac{2\dot{D}}{D}\right)\omega_ц + \ddot{\omega}_цT_{пр} \end{bmatrix}^T \times \\ & \times \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_цT_{пр} \\ \left(\frac{1}{T_н} - \frac{2\dot{D}}{D}\right)\omega_ц + \ddot{\omega}_цT_{пр} \end{bmatrix} + \int_0^t j_н^2 K_н dt \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Геометрия взаимного расположения цели и перехватчика показана на рис. 3.1.

В (3.9) и далее для простоты будет опущена зависимость переменных от времени.

Используя (3.7) и (3.8) в (3.6), получим систему уравнений:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \Delta\dot{\varphi} &= \dot{\varphi}_ц - \dot{\varphi}_н = \Delta\omega + \dot{\omega}_цT_{пр}, \\ \Delta\dot{\omega} &= \dot{\omega}_ц - \dot{\omega}_н = -\frac{1}{T_н}\Delta\omega - \frac{b}{T_н}j_н + \frac{1}{T_н}\omega_ц + \dot{\omega}_ц + \ddot{\omega}_цT_{пр}, \end{aligned}$$

из которой следует, что несоответствие динамических свойств цели и перехватчика, играющих роль измеряемого возмущения, определяется вектором [5]

$$(3.11) \quad \mathbf{s}_y = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_c T_{\text{пр}} \\ \left( \frac{1}{T_{\text{н}}} - \frac{2\hat{D}}{\hat{L}} \right) \omega_c + \dot{\omega}_c T_{\text{пр}} \end{bmatrix}.$$

Используя (3.10), (3.11) в (3.4), получим:

$$(3.12) \quad j_{\text{н}} = \frac{1}{K_{\text{н}}} \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & T_{\text{н}} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\hat{\varphi} \\ \Delta\hat{\omega} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \times \right. \\ \left. \times \begin{bmatrix} \hat{\omega}_c T_{\text{пр}} \\ \left( \frac{1}{T_{\text{н}}} - \frac{2\hat{D}}{\hat{L}} \right) \hat{\omega}_c + \hat{\omega}_c T_{\text{пр}} \end{bmatrix} \right\}, \\ j_{\text{н}} = \frac{bq_{21}}{K_{\text{н}}T_{\text{н}}}\Delta\hat{\varphi} + \frac{bq_{22}}{K_{\text{н}}T_{\text{н}}}\Delta\hat{\omega} + \frac{bg_{22}}{K_{\text{н}}T_{\text{н}}}\left(\frac{1}{T_{\text{н}}} - \frac{2\hat{D}}{\hat{L}}\right)\hat{\omega}_c + \\ + \frac{bg_{21}}{K_{\text{н}}T_{\text{н}}}\hat{\omega}_c T_{\text{пр}} + \frac{bg_{22}}{K_{\text{н}}T_{\text{н}}}\hat{\omega}_c T_{\text{пр}}.$$

Анализ (3.12) позволяет сделать следующие выводы.

1. При выполнении условия  $V_{\text{н}} > V_{\text{ц}}$  полученный метод является всеракурсным и всевысотным. Всеракурсность обеспечивается учетом знаков угловых ошибок и угловой скорости линии визирования (УСЛВ) и ее производных. Всевысотность обеспечивается использованием в качестве управляющего сигнала поперечного ускорения, а не рулей, эффективность которых зависит от плотности воздуха (высоты).

2. Учет в законе управления производных УСЛВ  $\dot{\omega}_c$  и  $\ddot{\omega}_c$  позволяет обеспечивать наведение на цели, маневрирующие по сложным законам.

3. Значимость последних трех слагаемых возрастает по мере приближения к цели и увеличения времени прогноза.

4. Для реализации полученного закона наведения необходимо иметь оптимальные оценки дальности, скорости сближения, бортовых пеленгов, УСЛВ и ее производных [5, 10, 11].

### 3.2. Анализ эффективности закона управления

Задача исследований – определение возможностей закона управления (3.12) и его упрощенных разновидностей по перехвату интенсивно маневрирующих целей.

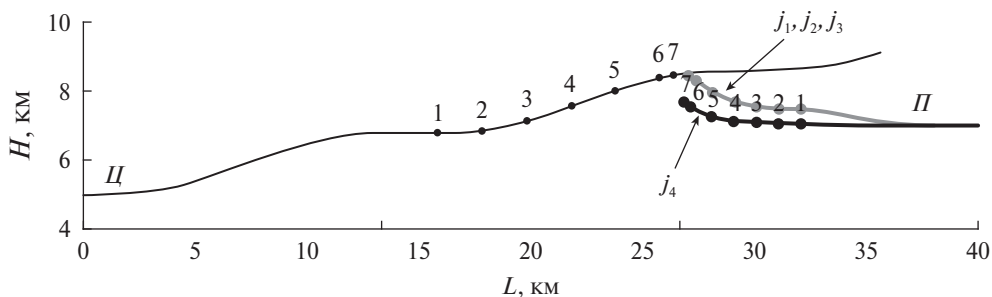


Рис. 5. Траектории полета цели и перехватчиков с различными законами наведения.

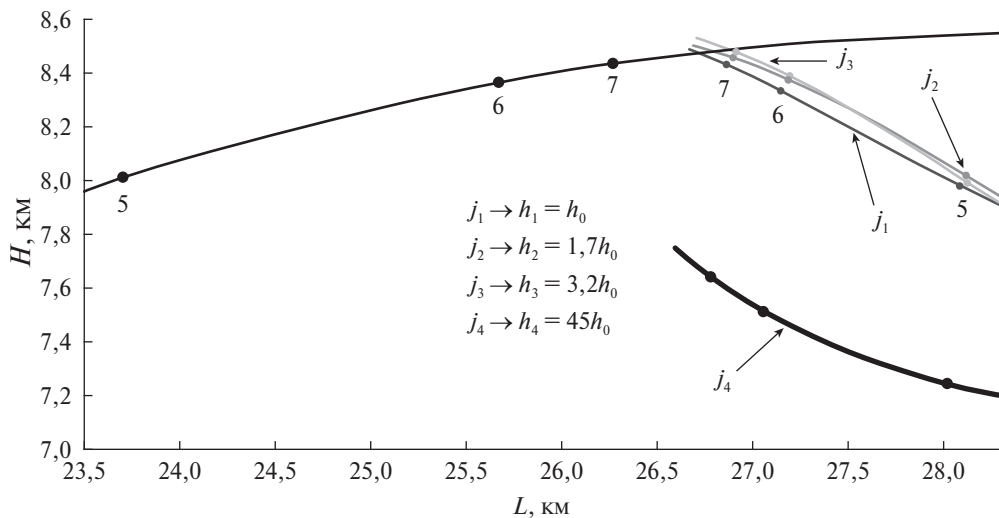


Рис. 6. Конечный участок траекторий полета цели и перехватчиков.

Исследования проводились по результатам моделирования процедуры перехвата цели (3.8), маневрирующей со сменой знака производных, перехватчиком (3.7) в передней полусфере при условии, что  $V_H < V_{ц}$  и все координаты состояния измеряются идеально точно.

В процессе исследования сравнивались результаты наведения по различным законам управления:

$j_1$  – определяемого (3.12);

$$j_2 = \frac{bq_{21}}{K_H T_H} \Delta \hat{\varphi} + \frac{bq_{22}}{K_H T_H} \Delta \hat{\omega} + \frac{bg_{22}}{K_H T_H} \left( \frac{1}{T_H} - \frac{2\hat{D}}{\hat{D}} \right) \hat{\omega}_{ц} + \frac{bg_{21}}{K_H T_H} \hat{\omega}_{ц} T_{пр};$$

$$j_3 = \frac{bq_{21}}{K_H T_H} \Delta \hat{\varphi} + \frac{bq_{22}}{K_H T_H} \Delta \hat{\omega} + \frac{bg_{22}}{K_H T_H} \left( \frac{1}{T_H} - \frac{2\hat{D}}{\hat{D}} \right) \hat{\omega}_{ц};$$

$$j_4 = \frac{bq_{21}}{K_H T_H} \Delta \hat{\varphi} + \frac{bq_{22}}{K_H T_H} \Delta \hat{\omega}.$$

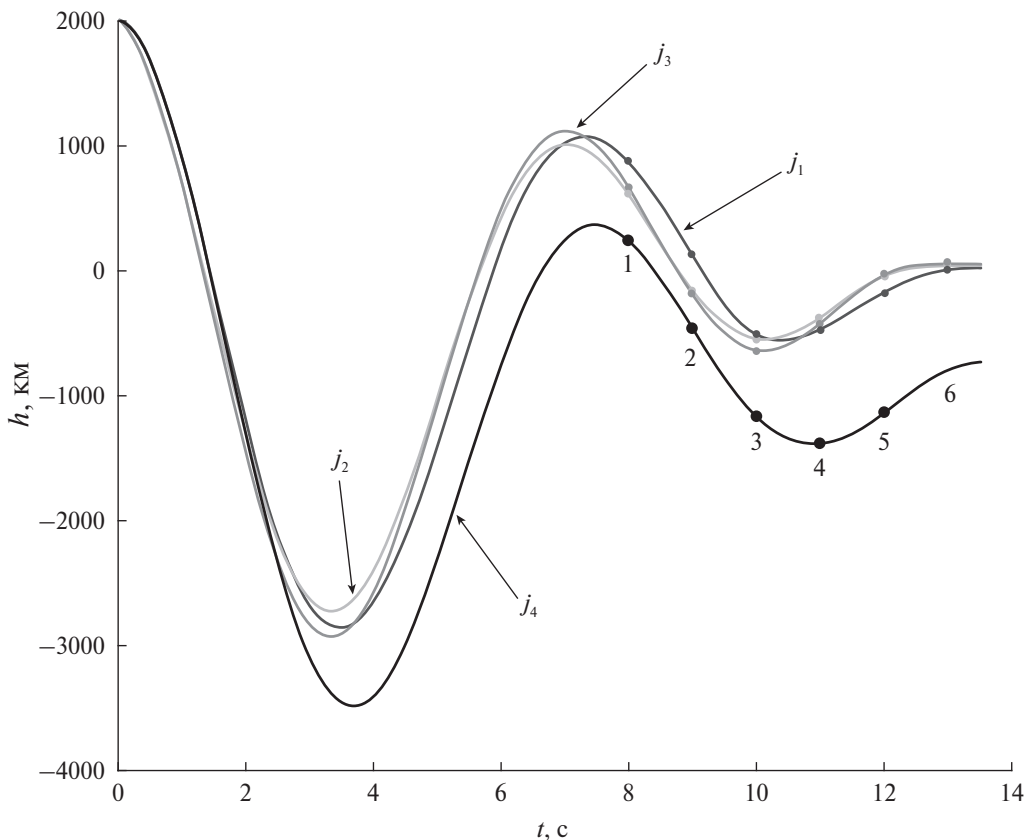


Рис. 7. Текущие промахи перехватчиков.

Эффективность оценивалась по величине текущего и конечного промахов и величине сигнала управления при различных значениях постоянной времени  $T_n$  и времени прогноза  $T_{пр}$ .

На рис. 5, 6 показаны траектории движения цели (Ц) и перехватчиков (П) с законами управления  $j_1$ – $j_4$ , на которых точками 1–5 показаны их текущие положения. На рис. 7 и 8 – соответствующие им промахи и ускорения.

Проведенные исследования позволили сделать следующие выводы.

1. Использование законов управления с сигналами  $j_1$ – $j_3$  позволяет реализовать достаточно высокую точность, показатели которой ухудшаются по мере исключения отдельных слагаемых. Использование традиционного метода перехвата с сигналом  $j_4$  не обеспечивает перехвата ВСЛА, движущегося со сменой знака производных угловых координат.

2. С увеличением инерционности носителя точность наведения ухудшалась.

3. С увеличением времени прогноза до значения  $T_{пр} = 2T_n$  точность наведения улучшалась.

4. Наведение выполняется в рамках реализуемых поперечных ускорений.

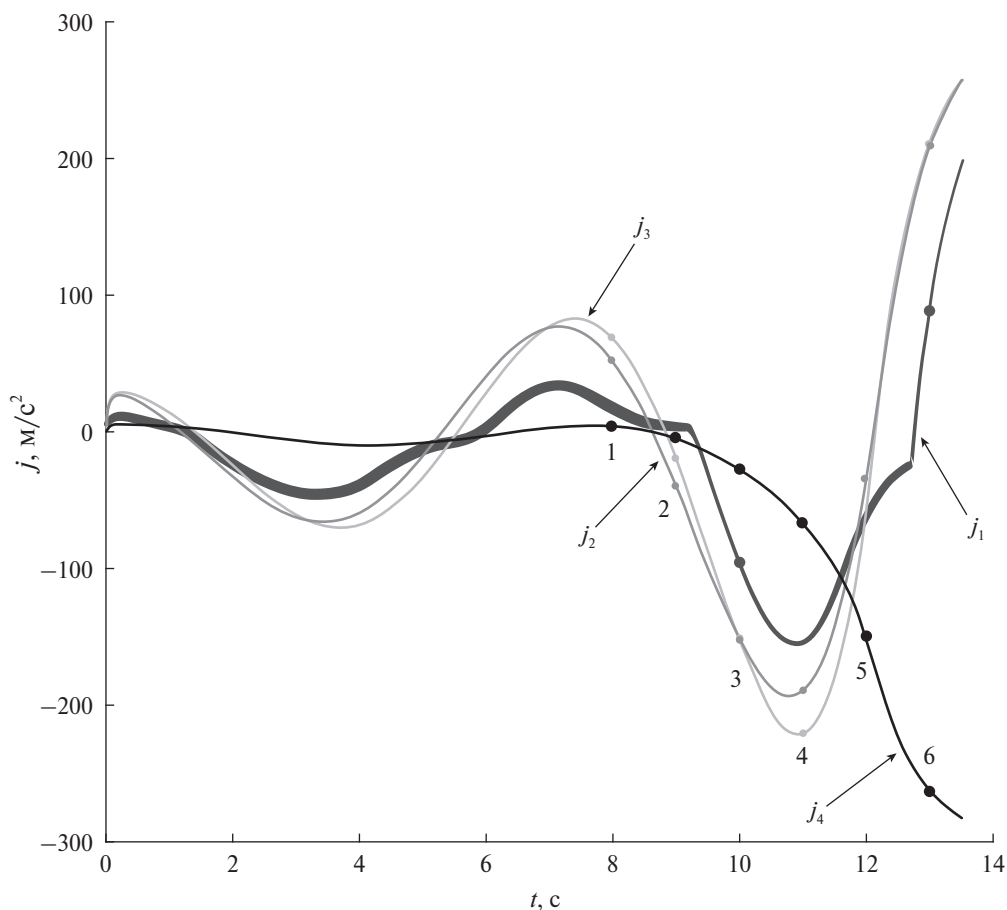


Рис. 8. Графики изменений управляющих сигналов.

В качестве недостатка можно отметить сложность информационного обеспечения, обусловленную необходимостью формировать оценки производных УСЛВ.

#### 4. Заключение

На основе материала, изложенного в статье, можно сделать следующие выводы.

Математический аппарат локальной оптимизации СТОУ позволяет синтезировать методы наведения на ВСЛА, учитывающие динамические свойства носителя. При этом задача может быть решена как минимум двумя способами.

Первый, основанный на трансформации входных воздействий, обеспечивает адаптацию метода наведения и его информационного обеспечения под конкретный тип носителя.

Второй основан на формировании управляющего сигнала не по текущему состоянию перехватчика и цели, а по результатам прогноза положения цели

на время, определяемое инерционностью носителя. Оба приема не требуют переработки носителя для улучшения его маневренности, что существенно снижает расходы на разработку системы перехвата.

Оба метода обеспечивают возможность перехвата интенсивно маневрирующего ВСЛА за счет учета в методах наведения производных угловой скорости, что потребует некоторого усложнения угломерного канала бортовой радиолокационной системы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авиационные системы радиоуправления. Учебник для военных и гражданских ВУЗов / Под ред. *В.И. Меркулова*. М.: Изд-во ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 2008.
2. *Girard Anouck R.* Proportional Navigation: Optimal Homing and Optimal Evasion / Anouck R. Girard, Pierre T. Kabamba // *SIAM Review*. 2015. V. 57. No. 4. P. 611–624.
3. *An Ji-Yeon.* A Collision Geometry-Based Guidance Law for Course-Correction-Projectile / Ji-Yeon An, Chang-Hun Lee, Min-Jea Tahk // *Int. J. Aeronaut. Spac. Sci.* 2019. V. 20. No. 2. P. 442–458.
4. *Верба В.С., Меркулов В.И., Закомолдин Д.В., Лихачев В.Л.* Проблемы перехвата высокоскоростных летательных аппаратов, маневрирующих по сложным законам. Часть 2 // *Успехи современной радиоэлектроники*. 2024. Т. 78. № 4. С. 5–14.
5. *Меркулов В.И., Верба В.С.* Синтез и анализ авиационных радиоэлектронных систем управления. Книга 1. М.: Радиотехника, 2023.
6. *Меркулов В.И., Верба В.С.* Синтез и анализ авиационных радиоэлектронных систем управления. Книга 2. М.: Радиотехника, 2023.
7. *Верба В.С., Меркулов В.И.* Подходы к оптимизации методов наведения на высокоскоростные интенсивно маневрирующие цели. Часть 1 // *АиТ*. 2024. № 11. С. 73–80.
8. *Galyaev A.A., Lysenko P.V., Rubinovich E.Y.* Optimal Stochastic Control in the Interception Problem of a Randomly Tacking Vehicle // *Mathematics*. 2021. No. 9. P. 2386.
9. *Su Wenshan.* Coverage-based cooperative guidance strategy against highly maneuvering target / Wenshan Su, Kebo Li, Lei Chen // *Aerospace Science and Technology*. 2017. V. 71. P. 147–155.
10. An Improved Kalman Filter Based on Long Short-Memory Recurrent Neural Network for Nonlinear Radar Target Tracking / F. Song, Y. Li, W. Cheng et al. // *Wirel. Communicat. Mobil. Comput.* 2022. No. 7. P. 1–10.
11. *Prokhorov, M.B.* The Kalman-Bucy method of optimal filtering and its generalizations / M.B. Prokhorov, V.K. Saul'ev // *J. Sov. Math.* 1979. V. 12. No. 3. P. 354–380.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.*

Поступила в редакцию 20.03.2024

После доработки 08.07.2024

Принята к публикации 02.09.2024

# Управление в технических системах

© 2025 г. ЯССЕР ДЕРРАП (derrar.yasser@gmail.com),

ФАРАХ САИДИ (saidifarah.mimouni@gmail.com)

(LAT, Лаборатория автоматика, Университет Тлемсена, Тлемсен, 13000, Алжир),

АБЕД МАЛЬТИ (abed.malti@gmail.com)

(GBM, Лаборатория биомедицины, Университет Тлемсена, Тлемсен, 13000, Алжир)

## ВИЗУАЛЬНОЕ СЕРВОУПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ОБЪЕКТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРИМИТИВОВ И ЗАРАНЕЕ СПЛАНИРОВАННЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Представлена новая техника жесткого выравнивания перспективной камеры с деформациями нежесткого объекта, использующая адаптивный подход визуального сервопривода. В отличие от существующих методов, предлагаемый подход не опирается на какие-либо параметрические или модельные априорные данные о деформации. Предполагая наличие заранее спланированной траектории камеры, наблюдающей за слитно жестким объектом, метод направлен на выравнивание этой траектории во время фазы выполнения, используя только наиболее релевантные ориентиры в качестве априорной информации. Подход не зависит от каких-либо параметрических или непараметрических моделей физики деформации. Он формулируется как задача отслеживания, встроенная в оптимальную схему визуального управления. Этот процесс отслеживания включает в себя визуальный сервопривод геометрических особенностей деформируемого объекта, соединяя этапы планирования и выполнения. Оптимальное визуальное управление определяется с использованием критерия взвешенного метода наименьших квадратов, который минимизирует расстояние между опорными признаками и наблюдаемыми в режиме реального времени. Веса представляют собой зависящие от времени плавные функции, которые кодируют значимость видимых особенностей объекта. Экспериментальные результаты демонстрируют способность метода адаптироваться к различным заранее спланированным траекториям и типам деформаций без необходимости предварительных знаний, а также его устойчивость к шуму при обнаружении признаков на изображении.

*Ключевые слова:* визуальное обслуживание, деформирование объектов, планирование движения, отслеживание траектории.

DOI: 10.31857/S0005231025020058, EDN: IQPGLO

### 1. Введение

Визуальное сервоприводное управление относится к использованию данных компьютерного зрения, полученных с одной или нескольких камер, для управления их движением. В отличие от задач отслеживания на основе зрения с жесткими объектами, которые достигли определенной зрелости, отслеживание с помощью визуального сервопривода на неупругих объектах

остается сложной задачей. В последние годы это вызвало большой интерес в сообществах компьютерного зрения и робототехники [1]. Многочисленные потенциальные применения нацелены на такие области, как дополненная реальность, медицинская визуализация, роботизированные манипуляции, и включают работу с огромным разнообразием объектов: ткани, бумага, резина, вязкие жидкости, кабели, пищевые продукты, органы и т.д [2]. Одна из характеристик отслеживания деформируемых объектов заключается в том, что форма объекта изменяется в процессе отслеживания. Недавние методы предложили гибридное визуальное сервоприводное управление, разделяющее поступательную скорость по оси  $Z$  и три угловые скорости. Такой метод улучшил производительность классического HVS (гибридного визуального сервоприводного управления) как в плоскости изображения, так и в рабочем пространстве [3]. Однако разделение степеней свободы камеры накладывает ограничения на коррекцию движения камеры и может привести к неравномерному отслеживанию деформации объекта. Отслеживание геометрии деформируемых объектов, таких как веревка и ткань, затруднено из-за непрерывной природы объекта (т.е. бесконечного числа степеней свободы) [4, 5]. Большинство современных методов отслеживания с помощью визуального сервопривода требуют как знания физических свойств объекта, так и мониторинга деформаций в реальном времени. Несколько исследований сосредоточены на мониторинге деформаций в реальном времени, но не на одновременном управлении деформацией [6]. Эти методы являются высокопараметрическими и требуют специфической тонкой настройки, которая сильно зависит от физики деформаций. В этой работе предлагается надежный подход к отслеживанию деформации объекта с помощью оптимального визуального сервопривода. Предполагается наличие заранее спланированной эталонной траектории камеры, наблюдающей за целевым объектом. Предполагается, что этот объект описан в сетке, состоящей из набора треугольных геометрических примитивов. Не предполагается никакого предварительного знания или информации о типе или физике деформации. В качестве эталонного деформируемого объекта использована печень. Задача формулируется следующим образом: пусть камера следует по эталонной траектории и наблюдает за печенью. Если печень деформируется, как лучше всего адаптировать траекторию камеры? В контексте роботизированной лапароскопии это стандартная проблема, которая обычно возлагается на оператора, управляющего камерой (лапароскопом) с помощью джойстика по рекомендации хирурга. Эта задача может быть полностью автоматизирована при решении двух основных вопросов: во-первых, необходима соответствующая система отслеживания печени, позволяющая следить за 2D-признаками на печени. Во-вторых, необходим критерий автоматизации, позволяющий адаптироваться к деформациям и соответственно изменять траекторию камеры. В данной статье предлагается новая стратегия для решения второй проблемы.

Вклад данной работы иллюстрируется на рис. 1. Можно подвести итоги следующим образом.

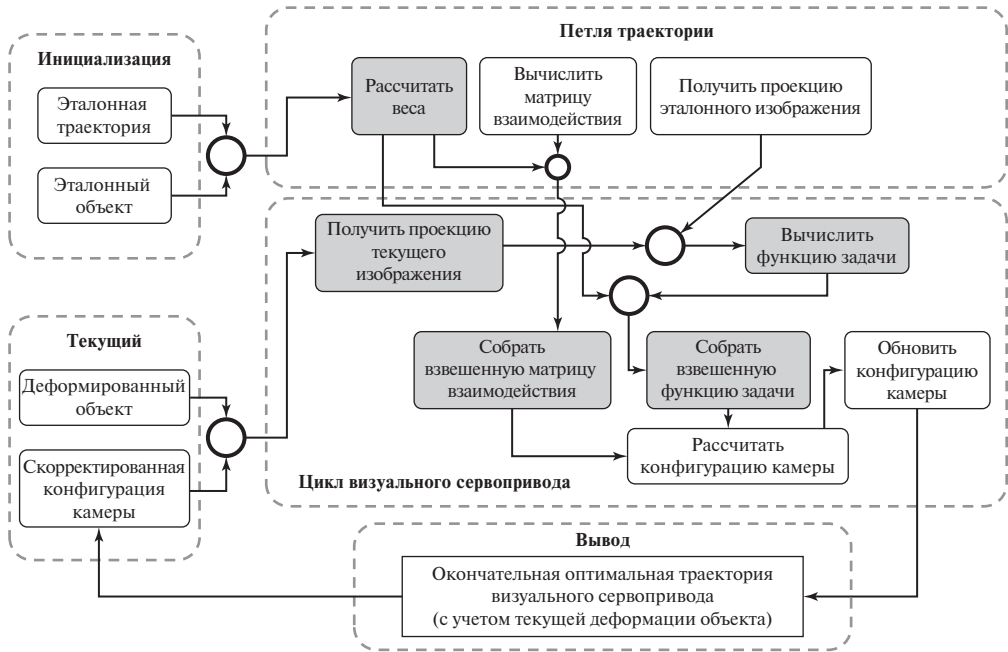


Рис. 1. Блок-схема алгоритма визуального сервопривода на основе треугольных сеток для деформируемых объектов.

Эта диаграмма иллюстрирует процесс работы алгоритма визуального сервопривода на основе треугольных сеток, используемого для управления движением камеры при наблюдении деформируемого объекта. Процесс начинается с инициализации эталонной траектории и данных о сетке, после чего происходит итерация по каждой точке на траектории. Для каждой точки алгоритм обрабатывает каждый треугольник в сетке объекта, вычисляя ключевые параметры, такие как веса и матрицы взаимодействия. Затем визуальный сервоприводный цикл итеративно корректирует позицию и ориентацию камеры, чтобы минимизировать ошибку между текущим изображением деформированного объекта и эталонным изображением (функция задачи), в конечном итоге создавая оптимизированную траекторию, учитывающую деформацию объекта.

- 1) Определение планирования движения на основе камеры для компенсации деформаций нежестких объектов жестким движением камеры. Это определение позволяет формализовать визуальное взаимодействие между деформируемым объектом и камерой с помощью набора примитивов «камера-треугольник». Эти треугольники являются геометрическими элементами сетки объекта.
- 2) Если связать функцию непрерывного веса с каждой парой примитивов камера-треугольник, то непрерывность вдоль траектории камеры и позволяет обеспечить плавное отслеживание.

- 3) Решение задачи визуального обслуживания и отслеживания в оптимальной структуре визуального контроля. Этот предложенный метод не предполагает каких-либо априорных данных о деформации объекта. Вышеуказанные весовые функции кодируют релевантность примитивов камера-треугольник. Наиболее важные примитивы, связанные с мишенями, имеют больший вес и позволяют найти оптимальное движение камеры для компенсации нежестких деформаций.
- 4) Экспериментальная валидация демонстрирует надежность подхода относительно шумов в обнаружении изображений, вариабельности траекторий и типов деформаций.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 представлены связанные современные работы. В разделе 3 вводятся основные инструменты для моделирования. В разделе 4 описывается визуальное сервоприводное управление с оптимальным визуальным контролем и отслеживанием. В разделе 5 представлены экспериментальные результаты и комментарии. Раздел 6 подводит итоги статьи и очерчивает направления будущих работ.

## 2. Связанная работа

Отслеживание и визуальное сервоприводное управление неупругими объектами – это недавно возникшие открытые проблемы. Многие подходы предлагают использовать физические или основанные на данных механические модели, встроенные в классические алгоритмы. Эти методы являются высокопараметрическими и тонко настраиваются для каждого конкретного типа деформируемых объектов. В этой статье предлагается универсальный подход, который позволяет жесткому визуальному сервоприводу камеры максимально соответствовать визуальным признакам объектов, подверженных неупругой деформации. В этом разделе рассматривается литература по визуальному сервоприводу, визуальному отслеживанию и выравниванию изображений.

### *2.1. Визуальное обслуживание жестких объектов*

Классическое визуальное сервоприводное управление – это метод управления движением робота с использованием обратной связи в реальном времени от датчиков зрения [7–9]. Визуальное сервоприводное управление имеет два основных подхода: позиционное визуальное сервоприводное управление и управление, основанное на изображениях [10, 11]. В этой статье используется позиционный визуальный контроль, так как предполагается отслеживание функций  $2D$  на целевом деформируемом объекте. Отношения между камерой и объектом представлены матрицей взаимодействия. Эта матрица может быть определена в пространстве изображения точками, линиями или эллипсами и моментами [12, 13]. В этой работе используется матрица взаимодействия на основе точек. Она используется в качестве элементарного

строительного блока для матриц взаимодействия на основе треугольников. Треугольники являются примитивами, образующими поверхность деформируемой формы. Поскольку эта проблема существует уже давно, перечень визуального обслуживания жестких объектов является обширным и не может быть охвачен в настоящем разделе. Здесь рассмотрим некоторые основные результаты этих работ. Джанаби и др. [14] используют уменьшенный набор отверстий, окружностей и клиньев как характеристики для их доступности во многих промышленных частях и для их легкого и надежного извлечения. В [15] моменты, рассчитанные с помощью сегментации изображения, используются для определения аналитической формы матрицы взаимодействия. В [16] предложена техника визуального сервопривода на основе маркеров для автоматического позиционирования камеры в случае роботизированной минимально инвазивной хирургии. Такой подход заключается в том, чтобы держать последующий хирургический инструмент в пределах изображения камеры. Это делается путем постоянной настройки позы эндоскопической манипуляции с камерой вместо того, чтобы держать инструмент в центре изображения. Кроме того, матрица взаимодействия может быть определена гибридным визуальным сервированием, совмещающим визуальное сервирование на основе изображений и позиционное визуальное сервирование. В [17] предложена стратегия управления в реальном времени и без инверсии с помощью алгоритма модельного прогнозирования на основе выборки для визуальных методов, основанных как на изображениях, так и на положении. Они учитывали системные ограничения и параметры неопределенности, связанные с роботом и измерениями камеры. В данной статье не рассматриваются неопределенности модели и не используется схема предиктивного управления. Вместо этого используется структура оптимального визуального управления, чтобы компенсировать как шум, так и деформации. Предлагается использовать непрерывные весовые функции на треугольных примитивах для учета их значимости при отслеживании опорной траектории.

## *2.2. Визуальное обслуживание нежестких объектов*

Роботизированная манипуляция нежесткими объектами является сложной задачей из-за деформаций, которые возникают и добавляют несколько степеней свободы к исходной задаче с жесткими объектами. Среди деформаций можно упомянуть сдвиг, масштабирование, растяжение, кручение, сжатие и т.д. Человеческие органы являются актуальными примерами нежестких объектов с разнообразными формами и деформационными поведением [18]. Использование таких объектов с визуальным сервированием позволяет автоматизировать проблемы в медицинском и хирургическом контекстах. Например, дополненная реальность накладывает МРТ (магнитно-резонансную томографию) изображения на поток живой лапароскопии [2], роботизированная лапароскопия – для направления лапароскопа и т.д. В [19] представлен контроллер, основанный на глубокой нейронной сети для управления положением и формой деформируемых объектов с неизвестными деформационны-

ми свойствами. Рассмотрены нелинейные свойства деформируемых объектов и использована многослойная нейронная сеть для моделирования функции отображения. В этой работе не используется никакая предварительная модель деформации органа, а используется набор функций непрерывного веса, который позволяет учитывать соответствующие регионы, чтобы сосредоточиться на нем. В [20] представлена гистограмма ориентированных морщин для описания вариаций формы сильно деформируемого объекта. Характеристики деформируемого объекта рассчитываются путем применения фильтров Габора и выделения компонентов высокой и низкой частоты, предварительно была вычислена визуальная обратная связь с использованием фазы обучения в автономном режиме, которая хранит соответствие между этими визуальными характеристиками и скоростью конечного эффектора. Предлагаемый здесь подход использует оптимальную настройку визуального управления, которая осуществляет встроенную коррекцию камеры без необходимости получения данных или тренировки нейронных сетей. В [21] разработан сервоалгоритм, который может изучать нелинейную деформационную функцию вместе с процессом манипуляции. При этом используется гауссовская регрессия процессов для моделирования и изучения параметров деформации мягкого объекта. В данной статье предлагается общий подход, который позволяет жесткому видеосервису максимально адаптировать визуальные особенности объектов, подверженных нежесткой деформации. В предлагаемом способе используется треугольное сетчатое представление визуализируемого объекта, вычисляется относительное жесткое изменение положения камеры, которое соответствует наиболее подходящим примитивам треугольника, не полностью игнорируя остатки.

### *2.3. Визуальное отслеживание нежестких объектов*

Отслеживающая деформация изучалась в нескольких работах [22–25]. В [26] представлен двухэтапный метод отслеживания объектов. Здесь использовался метод на основе ядра для эффективного обнаружения объекта в сложных условиях с перемещением камеры. Для повышения точности отслеживания использовался контурный метод, позволяющий четко следовать контуру объекта после определения его местоположения. В [27] предполагалось, что расширение объекта деформируется по сравнению с эталоном путем перемещения определенных контрольных точек последнего к контрольным точкам старого объекта. В предлагаемом здесь методе не рассматривается ни одной модели деформированного объекта, компенсация движения основана на соответствующих различиях характеристик изображения. В [28] представлена генеративная модель деформации тела, которая имеет способность выразить движение каждой основной части объекта. В [29] представлен новый подход для отслеживания деформируемой анатомической мишени в объемах 3D-ультразвука. Этот метод способен оценить деформации, вызванные физиологическими движениями пациента. Оценка смещения движущихся структур осуществляется с помощью подхода, основанного на интенсив-

ности, в сочетании с физической моделью. Это позволяет сделать оценку менее чувствительной к шуму на изображении. Предлагаемый здесь метод не обрабатывает 3D-реконструкцию объекта и фокусируется только на наилучшем движении камеры для компенсации деформаций и, в конечном счете, шума. В [30] был предложен метод 3D-слежения, который упорядочивается статистической моделью движения, полученной из биомеханического моделирования. Однако этот метод требует ручного определения конкретных точек целевого объекта (здесь предстательная железа) на каждом ультразвуковом кадре, чтобы управлять моделью. В [31] разработана система, которая отслеживает траекторию линии, нарисованной на гибком объекте. Также была оценена эффективность слежения со скоростью и точностью при наличии многих неопределенностей, основанных на динамической компенсации. В предлагаемом подходе нет шаблона, который нарисован на целевом объекте. Вместо этого набор весовых функций заранее определен для предварительно выбранных областей деформируемых объектов. Эти области определяются в наборе треугольников сетки объекта.

#### *2.4. Выравнивание изображения*

Выравнивание изображений заключается в выравнивании двух или более изображений одной и той же сцены по общей пространственной оси. Оно играет важную роль в компьютерном зрении и графике, таких как восстановление структуры из движения, 3D реконструкция, отслеживание движения и восстановление [32, 33]. Проблему, которая здесь решается, можно рассматривать как выравнивание изображения деформируемой сцены. Действительно, компенсация движения камеры, которая рассчитывается предлагаемым методом, также может быть использована для выравнивания текущего изображения с эталонным изображением по заданной траектории. В [34] предложен метод выравнивания края гибкого листового объекта по заданному отрезку линии в трехмерном пространстве. Произведена онлайн-оценка относительной позиции между концом края и рукой робота в визуальном законе управления сервированием. Метод авторов опирается на характерные точки, а не на особенности линий. В [35] фокусируются на параметрическом и непараметрическом методе выравнивания, которые имеют дополнительную силу. Предложено параметрическое выравнивание на основе признаков с использованием одной или нескольких гомографий, за которыми следует непараметрическое выравнивание в пиксельной форме. Метод авторов непараметричен относительно деформации объекта. В [36] предложен спектрально-пространственный взвешенный метод встроенного выравнивания распределения ядерного многообразия для классификации изображений дистанционного зондирования. Использован фильтр для выражения среднего спектра соседних образцов пикселей из каждого образца пикселя. В этой работе авторы рассматривают точки двумерных признаков как известные. В [37] предложен способ визуального сервопривода для перемещения ультразвукового зонда, используя робота для выравнивания плоскости изображения зонда с

иглой. Способ сегментирует иглу и обновляет набор визуальных признаков на основе модели иглы. Для отслеживания процесса центровки используется конечный автомат, а для управления датчиком в различных состояниях используются различные визуальные элементы. В этой статье авторы рассматривают перспективную модель камеры. Предложенный способ может быть применен к ультразвуковым датчикам, однако потребуется изменить модель проекции, которая используется в данной статье. В [38] была представлена система тактильной обратной связи на основе зрения, предназначенная для помощи в перемещении эндоскопического устройства во время капсульной эндоскопии. Она позволяет пользователю контролировать движение капсулы вдоль сгенерированного пути. Тактильный модуль также помогает оператору, преобразуя 3D-карты и относительные пути в направляющую виртуальную силу. Измеряя текущее относительное расстояние между вводом пользователя и границами карт, модуль тактильного управления проверяет, удаляется ли пользователь или приближается к стенкам толстой кишки, и генерирует обратную силу, чтобы помочь оператору во время навигационной процедуры. Пользователь также будет ощущать притягивающую виртуальную силу обратной связи в направлении сгенерированного пути, что поможет ему в навигации. Предложенный здесь метод может быть применен для подачи необходимой коррекции в тактильный модуль. Вместо компенсации траектории камеры корректируется траектория капсулы с помощью управления тактильным джойстиком.

### 3. Визуальные примитивы и интерактивное моделирование

#### 3.1. Определения

##### 3.1.1. Треугольник

Рассмотрим треугольник  $T$  как базовый геометрический примитив, состоящий из трех точек в трехмерной рабочей области. Пусть  $L = \mathbf{R}^9$  – конфигурационное пространство этого примитива. Обозначим через  $l = (X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2, Z_3)^T$  конфигурацию  $T$  в  $L$ , где  $(X_i, Y_i, Z_i)^T$ ,  $1 \leq i \leq 3$  являются координатами трех вершин, образующих треугольник  $T$ . Индекс  $i$  представляет число вершин рассматриваемого треугольника.

##### 3.1.2. Камера

Обозначим как  $C$  камеру, которая отображает один или несколько треугольных примитивов на 2D-объект в пространстве изображения. Пусть  $C = \mathbf{SE}(3)$  будет конфигурационным пространством этого датчика. Обозначим через  $c$  конфигурацию камеры в пространстве  $C$ .

##### 3.1.3 Чувство треугольника

Восприятие треугольника  $T$  камерой  $C$  можно охарактеризовать непрерывным отображением:

$$(1) \quad \Pi : C \times T \rightarrow I_{c,l},$$

$$(2) \quad (c, l) \mapsto \Pi(c, l).$$

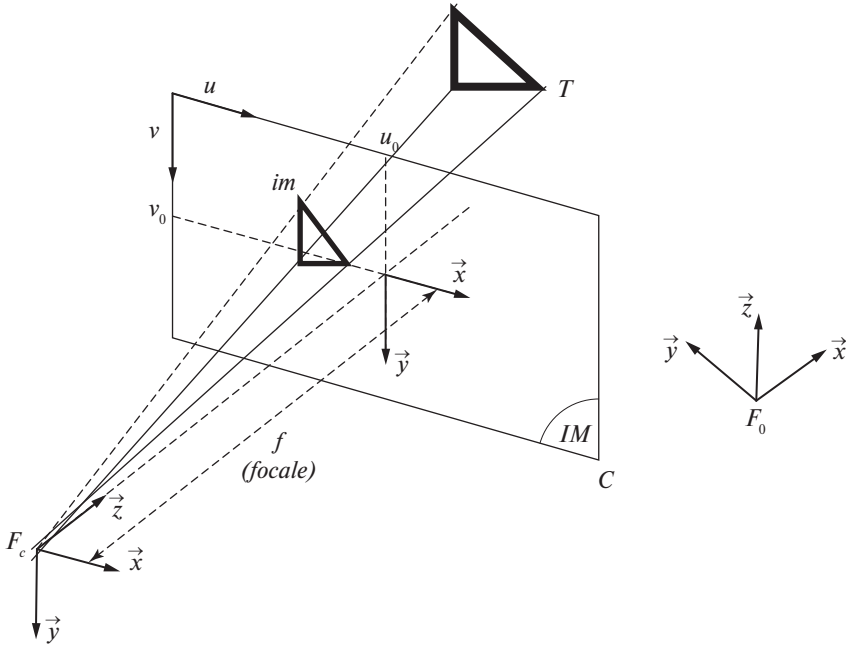


Рис. 2. Перспективная проекция треугольника на плоскость изображения камеры.

Это связывает с каждой конфигурацией камеры и треугольника функцию в пространстве изображения  $I_{c,l} \subset \mathbf{R}^6$ . Пространство изображения состоит из проекции тройки точек, описывающих интересующий треугольник (см. рис. 2).  $\Pi$  обычно определяется для подмножества  $C \times T$  соответствующим конфигурациям пары камеры и треугольника, который должен находиться в поле зрения камеры. В случае перспективной камеры  $\Pi$  может быть записан как

$$(3) \quad \Pi(c, l) \left( \begin{array}{l} x_1 = X_1/Z_1, \quad x_2 = X_2/Z_2, \quad x_3 = X_3/Z_3, \\ y_1 = Y_1/Z_1, \quad y_2 = Y_2/Z_2, \quad y_3 = Y_3/Z_3 \end{array} \right)^\top.$$

### 3.2. Локализация и визуальное обслуживание

#### 3.2.1. Уравнение локализации

Рассмотрим камеру в конфигурации  $c \in C$ . Давайте рассмотрим  $m$  треугольников  $T_1, \dots, T_m$  известных конфигураций  $l_1, \dots, l_m \in L$ , где каждый из них виден с камеры  $C$ . Таким образом, каждая пара  $(C, T_i)$  из треугольника-камеры описывается уравнением локализации:

$$(4) \quad \Pi(c, l_i) = im_i,$$

где  $im_i \in I_{c,l_i}$  является проекцией  $T_i$  в пространстве изображений.  $im_i = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)^\top$ ,  $c$  и  $l_i$  рассматриваются в следующем разделе.

### 3.2.2. Визуальное обслуживание справочной конфигурации

Если ожидается, что камера будет следовать по эталонной траектории, просматривая эталонный объект, который может деформироваться, то результат уравнения (4), как ожидается, будет в районе эталонной конфигурации камеры и эталонной конфигурации объекта. Если пренебречь остатком линеаризации, то уравнение (4) может быть линеаризовано следующим образом:

$$(5) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial c}(c_0, l_{0i})(c - c_0) + \frac{\partial \Pi}{\partial l}(c_0, l_{0i})(l_i - l_{0i}) = im_i - im_{0i}.$$

Здесь  $c_0$  – это эталонная конфигурация камеры на заранее определенной траектории,  $l_{0i}$  – ожидаемая эталонная конфигурация рассматриваемого треугольника с эталонными характеристиками  $im_{0i}$  в пространстве изображений  $I_{c,l_i}$ . Во время выполнения обе эти эталонные конфигурации могут отличаться от конфигураций среды выполнения по двум основным причинам: дрейф камеры и деформация объекта. Эти соображения верны, если предположить, что локализация выполняется на высокой частоте [39] (быстрее, чем и контрольная петля камеры, и динамика деформации объекта).

$im_i$  и  $im_{0i}$  соответственно представляют собой изображение треугольника  $T_i$  на датчике  $C$  и ожидаемое изображение, т.е. изображение, которое было бы видно из конфигурации  $c_0$ , если не было дрейфа камеры и деформации объекта.

$\frac{\partial \Pi}{\partial c}$  – матрица Якобиана порядка 6 представляет изменение изображения по отношению к изменению конфигурации камеры. Эта матрица Якоби происходит от геометрических свойств камеры и треугольника и представляет собой так называемую матрицу взаимодействия в классической визуальной сервирующей терминологии.  $\frac{\partial \Pi}{\partial l}$  – матрица Якоби порядка  $6 \times 9$ , представляющая изменение изображения в зависимости от изменения конфигурации треугольника. Эта матрица Якоби является нулевой матрицей в случае недеформирующихся объектов. Большинство предыдущих работ смоделировали эту матрицу либо с помощью физических уравнений деформаций, либо с помощью алгоритмов машинного обучения, управляемых данными [40–42]. В этой работе используется оптимальная структура визуального контроля для внедрения контрольного цикла алгоритма визуального обслуживания. Этот подход позволяет учитывать деформационное поведение без необходимости численного вычисления или регресса деформаций. Сначала сосредоточимся на аналитической формулировке матрицы взаимодействия. Хорошо известно, что для одной точки в 3D-координатах  $(X, Y, Z)$ , воспринимаемой в 2D-координатах  $(x, y)$ , матрица взаимодействия, которая связывает вариации положения камеры с вариациями 2D-координат проецируемого изображения, записывается как [15]

$$(6) \quad L(x, y, Z) = \begin{bmatrix} L_u(x, y, Z) \\ L_v(x, y, Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z} & 0 & \frac{-y}{Z} & -xy & 1 + x^2 & -y \\ 0 & \frac{1}{Z} & \frac{-x}{Z} & -(1 + y^2) & xy & x \end{bmatrix}.$$

Предполагается, что внутренние компоненты камеры известны и отличаются от координат пикселей. Если рассматривать треугольник  $T$  в координатах отсчета  $l_0 = (X_1^0, X_2^0, X_3^0, Y_1^0, Y_2^0, Y_3^0, Z_1^0, Z_2^0, Z_3^0)^\top$  (см., например, рис. 2), то можно представить связанную матрицу взаимодействия как

$$(7) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial c}(c_0, l_{0i}) = \begin{bmatrix} L_u(x_1^{0i}, y_1^{0i}, Z_1^{0i}) \\ L_u(x_2^{0i}, y_2^{0i}, Z_2^{0i}) \\ L_u(x_3^{0i}, y_3^{0i}, Z_3^{0i}) \\ L_v(x_1^{0i}, y_1^{0i}, Z_1^{0i}) \\ L_v(x_2^{0i}, y_2^{0i}, Z_2^{0i}) \\ L_v(x_3^{0i}, y_3^{0i}, Z_3^{0i}) \end{bmatrix},$$

где  $im^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_1^0, y_2^0, y_3^0, z_1^0, z_2^0, z_3^0)^\top$  является контрольной проекцией треугольника на плоскость камеры (фокусное расстояние и центр камеры считаются известными и заданными). Для получения более подробной информации об определении  $c$  и  $\frac{\partial \Pi}{\partial c}(c_0, l_{0i})$  см. Приложение.

### 3.2.3. Взвешенное трехстороннее визуальное обслуживание на жестких объектах

Если считаем объект жестким, то  $l_i = l_{0i}$  для всех  $m$  треугольников, и уравнение 5 упрощается

$$(8) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial c}(c_0, l_{0i})(c - c_0) = im_i - im_{0i}.$$

Классические визуальные сервирующие подходы на жестких объектах заключаются в решении для позы камеры  $c$  такого уравнения для всего множества треугольников. Это уравнение определяет и решает локальную задачу, которая заключается в подгонке текущего вида треугольника к ожидаемому. Можно также назначить положительные вещественные веса треугольникам объекта, которые имеют отношение к текущей задаче. Вышеприведенное уравнение оказывается

$$(9) \quad w_i \frac{\partial \Pi}{\partial c}(c_0, l_{0i})(c - c_0) = w_i(im_i - im_{0i}).$$

Здесь  $w_i$  – присвоенный вес треугольнику  $L_i$ . Рассматривая весь набор треугольников, составляющих объекты с соответствующим набором весов, построим следующую систему уравнений:

$$(10) \quad W(c - c_0) = IM - IM_0,$$

где

$$(11) \quad W = \begin{pmatrix} w_0 \frac{\partial \Pi}{\partial c}(c, l_0) \\ \vdots \\ w_m \frac{\partial \Pi}{\partial c}(c, l_m) \end{pmatrix},$$

$$(12) \quad IM = \begin{pmatrix} w_1 im_1 \\ \vdots \\ w_m im_m \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad IM_0 = \begin{pmatrix} w_1 im_{01} \\ \vdots \\ w_m im_{0m} \end{pmatrix}.$$

Для решения уравнения (10) для положения камеры в случае жесткого объекта можно принять во внимание множество факторов. Например, шум при измерении положения треугольника на изображении, неточность формы трехмерного объекта, которая была предварительно отсканирована или смоделирована, и т.д. Если число треугольников слишком велико, система уравнений (10) не имеет точного решения. Наоборот, если система уравнений (10) не определена, существует бесконечное число возможных положений камеры, которые удовлетворяют ему. В этом случае для решения могут быть приняты такие соображения, как решение о минимальных нормах, как это было сделано в [39]. В следующем разделе опишем третий вклад авторов, который заключается во встраивании взвешенного треугольного визуального сервирующего формализма в оптимальную структуру визуального контроля для нежестких объектов. Такое встраивание позволяет рассчитать коррекцию для наложения на движение камеры при отслеживании опорной траектории на деформирующемся объекте. Предложенный подход не учитывает каких-либо предварительных знаний или параметрической модели, которые описывают деформацию целевого объекта.

#### **4. Обслуживание на деформируемых объектах с помощью визуального элемента управления, отображаемого через точку с запятой**

В трехмерной реконструкции деформирующихся объектов из монокулярных представлений доказано, что любая деформированная форма лежит на минимальной энергии растяжения/сжатия [43–46]. Здесь не будем стремиться выводить 3D форму из 2D вида, нужно только компенсировать деформацию движением камеры. Поэтому определяем такое движение как то, при котором энергия растяжения/сжатия минимальна. Используя уравнение (5), это сводится к минимизации деформации, видимой через перспективную проекцию, что можно формализовать следующим образом:

$$(13) \quad \hat{c} = \underset{\tilde{c} \in C}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left\| \frac{\partial \Pi}{\partial l}(c_0, l_{0i})(l_i - l_{0i}) \right\|_2^2,$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial l}(c_0, l_{0i})(l_i - l_{0i}) + \frac{\partial \Pi}{\partial c}(c_0, l_{0i})(\tilde{c} - c_0) = (im_i - im_{0i}).$$

В работе некоторым пространственным деформациям придается большее значение, чем другим. Эта цель оформляется через ассоциацию действительных положительных значений веса и треугольных примитивов. Таким обра-

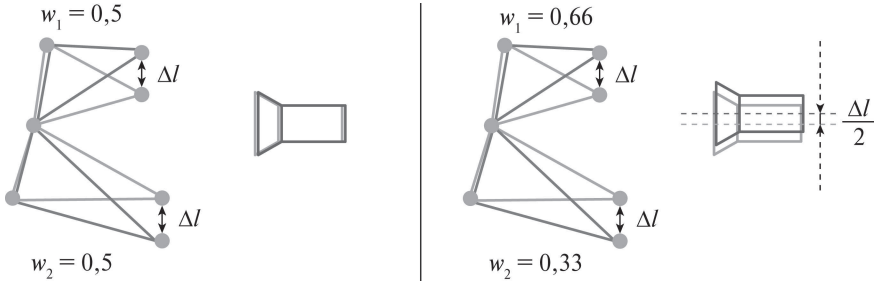


Рис. 3. Иллюстрация весового эффекта.

зом, вышеуказанный критерий может быть переписан как

$$(14) \quad \hat{c} = \underset{\tilde{c} \in C}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left\| w_i \frac{\partial \Pi}{\partial l} (c_0, l_{0i}) (l_i - l_{0i}) \right\|_2^2,$$

$$\text{s.t. } w_i \frac{\partial \Pi}{\partial l} (c_0, l_{0i}) (l_i - l_{0i}) = -w_i \frac{\partial \Pi}{\partial c} (c_0, l_{0i}) (\tilde{c} - c_0) + w_i (im_i - im_{0i}).$$

Этот критерий позволяет оценить жесткое движение камеры  $\hat{c}$ , что сводит к минимуму просмотр между эталонной и текущей деформированной фигурой. Эти веса позволяют придавать большее значение некоторым регионам, чем другим, как показано на рис. 3. Следующее выражение используется для вычисления коррекции положения камеры.

На этом рисунке рассматривается контрольная камера светлого цвета, которая видит два опорных треугольника светлого цвета. После деформации вершины движутся в противоположных направлениях на  $\Delta l$  вдоль вертикальной оси. Этот сдвиг вызывает нежесткую деформацию двух треугольников. Здесь рассмотрены два сценария. В левой части рисунка рассмотрены равные веса для обоих треугольников. В этом случае поправка с уравнением (14) не производит никакого движения, так как движение вершин компенсирует друг друга и треугольник имеет одинаковый вес. Правая часть рисунка рассматривает верхний треугольник с весом, в два раза превышающим значение нижнего. В этом случае уравнение (14) возвращает вертикальный сдвиг с половиной  $\Delta l$ . Если  $w_2 = 0$ , исправление будет представлять собой вертикальный сдвиг вверх в пределах  $\Delta l$ .

*Предложение 1. Рассмотрим камеру в некоторой эталонной конфигурации  $c_0 \in C$ . Камера видит деформированную форму, которая, как предполагается, имеет минимальную энергию растяжения/сжатия. Компенсацию движения жесткой камеры  $\hat{c}$ , которая удовлетворяет критерию уравнения (14), можно вычислить следующим образом:*

$$(15) \quad \hat{c} = c_0 + W^+ (IM - IM_0), \text{ если } W - \text{полный ранг столбца.}$$

$$(16) \quad \hat{c} = c_0 + W^T (W W^T)^{-1} (IM - IM_0),$$

*в противном случае и если  $W$  имеет полный ранг строки.*

$W^+$  является псевдообратной матрицей  $W$ .

*Доказательство.* Принимая во внимание формулу (14) и используя уравнение линеаризации (5), запишем оптимальный критерий как

$$(17) \quad \hat{c} = \operatorname{argmin}_{\tilde{c} \in C} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left\| w_i \frac{\partial \Pi}{\partial c}(c_0, l_{0i})(c - c_0) - w_i(im_i - im_{0i}) \right\|_2^2.$$

Это в точности взвешенная сумма квадратов евклидовых норм разности каждого изображения, которое будет отображаться из  $c \in C$ , и изображения, которое будет отображаться во время выполнения. Эта минимизация может быть переписана в объединенной формуле как

$$(18) \quad \hat{c} = \operatorname{argmin}_{\tilde{c} \in C} \frac{1}{2} \|W(\tilde{c} - c_0) - (IM - IM_0)\|_2^2.$$

Если  $W$  является полным рангом столбца, то решение для  $c$  этой взвешенной задачи наименьших квадратов будет

$$(19) \quad \hat{c} = c_0 + (W^\top W)^{-1} W^\top (IM - IM_0).$$

Считаем, что в каждый момент времени есть достаточно видимых треугольников, чтобы вычислить коррекцию для шести степеней свободы камеры. Для этого требуем, чтобы были видны по крайней мере два треугольника, чтобы избежать двусмысленных ситуаций [45]. Если задана сетка из  $N$  точек, а камера отслеживает полные области этой сетки, справедливо считать, что это условие проверяется в большинстве случаев. В некоторых случаях, когда это может быть не проверено (например, камера слишком близко к объекту), устанавливаем безопасный тест для числа видимых треугольников, который позволяет вычислить решение минимальной нормы. Если  $W$  является рангом полной строки, то коррекция камеры вычисляется как минимальная норма движения камеры, удовлетворяющая следующему критерию [47]:

$$(20) \quad \hat{c} = \operatorname{argmin}_{\tilde{c} \in C} \frac{1}{2} \|\tilde{c} - c_0\|_2 \text{ s.t. } W(\tilde{c} - c_0) = (IM - IM_0).$$

Учитывая, что  $W$  является рангом полной строки, решение этой задачи с наименьшими квадратами будет

$$(21) \quad \hat{c} = c_0 + W^\top (W W^\top)^{-1} (IM - IM_0).$$

В некоторых изолированных вырожденных случаях, когда  $W$  не является ни полным рангом столбца, ни полным рангом строки, камера не корректируется из эталонной конфигурации, и будет  $\hat{c} = c_0$ .

События, освещенные в этом разделе, можно резюмировать следующим образом. Жесткая компенсация движения нежесткого объекта камерой состоит из решения системы уравнений, которые соотносятся конфигурацией камеры с изображениями треугольников объекта. Если система чрезмерно

ограничена, компенсация состоит из поиска конфигурации, минимизирующей взвешенную сумму остатков. Если нет деформации и треугольники все жесткие, выбор веса не повлияет на результат (игнорируя шум при обнаружении вершин). Если треугольники объекта деформируются, выбор веса повлияет на исправленную конфигурацию  $\hat{c}$ , как показано на рис. 3. По этой причине предлагаем использовать эти веса в качестве инструмента для планирования движений на основе треугольной сетки для деформируемых объектов.

#### 4.1. Движение на основе треугольной сетки для визуального обслуживания деформируемых объектов

*Определение 1. Давайте рассмотрим камеру, идущую по эталонной траектории и просматривающую деформируемый объект, зацепленный с  $m$  треугольниками  $T_1, \dots, T_m$ . А треугольная сетка движения состоит из двух основных компонентов:*

(i)

$$(22) \quad \gamma : [0, 1] \rightarrow C : s \mapsto \gamma(s),$$

где  $[0, 1]$  – нормализованный интервал временного параметра траектории  $s$ .

(ii)  $m$  – непрерывные положительные вещественные функции  $w_1, \dots, w_m$ :

$$(23) \quad w_i : [0, 1] \rightarrow R^+ : s \mapsto w_i(s),$$

$w_i(s) = 0$  для любого  $s$  такой, что  $T_i$  не видно камерой  $C$ , когда камера находится в конфигурации  $\gamma(s)$ . Непрерывность  $w_i$  требуется, чтобы избежать нежелательных прыжков во время коррекции траектории камеры [39].

Указанное выше движение на основе треугольной сетки для компенсации жесткого движения позы камеры заключается в корректировке текущей конфигурации камеры в задаче управления замкнутым контуром путем вычисления поправки из предложения 1 об эталонной конфигурации  $\gamma(s)$  и с величинами веса  $w_i(s)$  для абсциссы  $s$  по траектории. Корректирующая формула может быть написана для данной абсциссы  $s$  следующим образом:

1) Если  $W(s)$  является полным рангом столбца, то

$$(24) \quad \hat{c}(s) = \gamma(s) + (W(s)^\top W(s))^{-1} W(s)^\top (IM(s) - IM_0(s)).$$

2) Если  $W(s)$  не является полным рангом столбца, но является рангом полной строки, то

$$(25) \quad \hat{c}(s) = \gamma(s) + W(s)^\top (W(s) W(s)^\top)^{-1} (IM(s) - IM_0(s)).$$

3) Иначе

$$(26) \quad \hat{c}(s) = \gamma(s).$$

Здесь  $W(s)$ ,  $IM(s)$  и  $IM_0(s)$  являются расширениями обозначений в уравнениях (11) и (12), когда конфигурация камеры-образца следует по эталонной траектории  $c_0(s) = \gamma(s)$ ,  $s \in [0, 1]$ . Случай (3) уравнения (26) является граничным и почти никогда не встречается. Он используется в качестве безопасного случая, если когда-либо  $W$  не является ни полным рангом столбца, ни полным рангом строки. Вышеприведенные формулы скорректированной траектории  $\hat{c}(s)$  из уравнений (24)–(26) можно интерпретировать как удовлетворяющие оптимальному визуальному выравниванию и представляют минимум интеграла по всей траектории разности между эталонным и текущим деформированным видом:

$$(27) \quad J = \int_0^1 \frac{1}{2} \|W(c(s) - \gamma(s)) - (IM(s) - IM_0(s))\|_2^2 ds.$$

Для того, чтобы иметь гладкие поправки необходимо иметь непрерывные веса [39]. Это происходит, например, если веса пропорциональны 2D площади рассматриваемого треугольника на плоскости изображения (в Приложении даны подробные сведения об их использовании и вычислениях). Если объект является органом и задача заключается в компенсации деформаций, наблюдаемых с помощью лапароскопа, то в идеале вес может быть установлен вручную техником перед операцией. Действительно, хирург с помощью техника может указать основную область-мишень органа, которая должна поддерживаться на постоянном уровне при наблюдении лапароскопом. Затем технический специалист может установить более высокие веса для этой области по сравнению с другими. Такой полуавтоматический процесс может быть выполнен при планировании операции.

## 5. Предлагаемый алгоритм и детали реализации

Алгоритм (1) визуального сервопривода, описанный в этом разделе, использует сетку деформируемого объекта для достижения точного позиционирования камеры относительно объекта, даже когда объект деформируется. Основные шаги следующие:

- 1) Цикл траектории (строки 5–27) выполняет итерацию по опорной траектории камеры, и для каждого положения камеры алгоритм вычисляет:
  - а) для каждого треугольника, используя опорный объект, вес, проекцию опорного изображения и матрицу взаимодействия.
  - б) всеобъемлющую взвешенную матрицу взаимодействия, а также опорные и текущие взвешенные изображения объекта.
- 2) Цикл визуального сервопривода (строки 17–26) затем итеративно находит оптимальное обновление положения камеры, которое минимизирует разницу между опорными и текущими взвешенными изображениями объекта, соответственно обновляя положение камеры.

---

**Algorithm 1** Управление движением на основе треугольной сетки для визуального сервопривода на деформируемом объекте.

---

**Дано:** Опорная траектория  $\gamma : [0, 1] \rightarrow C : s \mapsto \gamma(s)$ .

**Дано:** Деформируемый объект с сеткой, состоящей из  $m$  треугольников  $T_1, \dots, T_m$ .

**Дано:**  $\text{step size}$  – параметр шага для дискретизации опорной траектории.

**Дано:**  $\text{max}_{iter}$  – для максимального числа итераций.

**Дано:**  $\epsilon_{im}$  – порог ошибки для остановки на основе разницы изображений.

- 1: **Инициализация:**
  - 2: Загрузить опорную траекторию  $\gamma$  для камеры;
  - 3: Загрузить данные о сетке опорного объекта;
  - 4: Загрузить данные о сетке того же объекта в его деформированном состоянии;
  - 5: **Цикл траектории:**
  - 6: Для  $s \in [0, 1]$  **выполнить**
  - 7:   Получить текущую конфигурацию камеры  $c(s) \leftarrow \gamma(s)$ ;
  - 8:   **Цикл по треугольным сеткам:**
  - 9:   По каждому треугольнику  $i$  от 1 до  $m$  **выполнить**
  - 10:    Получить текущий вес  $w_i$ , применяя формулы в уравнениях (B14) и (B15);
  - 11:    Получить текущую матрицу взаимодействия, применяя формулу из уравнения (7);
  - 12:    Получить проекцию опорного изображения  $im_i^0$  треугольного примитива;
  - 13:    Вычислить текущую задачу функции треугольника, используя уравнение (10);
  - 14:    **Конец цикла**
  - 15:     $error \leftarrow \epsilon_{im} + 1$ ;
  - 16:     $iter \leftarrow 0$ ;
  - 17:    **Цикл визуального сервопривода:**
  - 18:    Пока выполняется условие  $iter < \text{max\_iter}$  **or**  $error > \epsilon_{im}$  **выполнить**
  - 19:    Получить текущую проекцию изображения примитива  $im_i$  из текущего положения камеры;
  - 20:    Собрать матрицу взаимодействия объекта с учетом веса  $W$  с использованием уравнения (11);
  - 21:    Собрать опорное и текущее изображения объекта с учетом веса  $IM, IM_0$  с использованием уравнения (12);
  - 22:    Решить оптимальную функцию сервопривода, используя уравнения (24)–(26);
  - 23:    Использовать полученные  $\hat{c}(s)$  для обновления текущей конфигурации камеры;
  - 24:     $iter \leftarrow iter + 1$ ;
  - 25:     $error \leftarrow \|W(\hat{c}(s) - c(s)) - (IM - IM_0)\|_2$ ;
  - 26:    **Конец цикла**
  - 27:    **Конец цикла**
  - 28: **Вывод:**
  - 29: Окончательная оптимальная траектория визуального сервопривода с учетом текущей деформации объекта.
- 

Этот подход позволяет визуальному сервоприводу адаптироваться к деформациям объекта, используя представление сетки для корректировки траектории камеры в соответствии с деформацией.

Этот алгоритм был реализован с использованием Matlab2015a. Он был запущен на ноутбуке с процессором Intel Core (TM) i5-4200U и 6 ГБ оперативной памяти.

Модель объекта, используемая в работе, была треугольной сеткой с 10000 вершинами и 20000 гранями. Опорная траектория была дискретизирована с шагом  $step\_size$ , равным 10 Hz. Максимальное количество итераций,  $max\_iter$ , было установлено на 100, а порог ошибки для остановки  $\epsilon_{im}$  был установлен на 0,01 пикселей. Временная сложность составляет  $O(N \times m^4 max\_iter)$  порядка, а пространственная сложность составляет  $O(m^2)$  порядка. Общий алгоритм выполняется со средней скоростью 40 Hz, что позволяет проводить визуальный сервопривод деформируемого объекта в реальном времени.

Этот алгоритм был протестирован в различных сценариях, включая несколько типов объектов, опорных траекторий, режимов деформации и уровней шумов на изображении. В следующем разделе представлены результаты, полученные в этих разнообразных условиях.

## 6. Результаты по смоделированным данным

Этот раздел демонстрирует несколько примеров проверочных тестов с использованием симулированных данных на двух деформируемых объектах: плоском объекте, который деформируется в форму выпуклости, и модели человеческой печени, которая деформируется на левой и правой долях. Были проведены эксперименты как с линейными, так и с нелинейными деформациями. Метод протестирован на двух геометрических траекториях: линейной и круговой. Для проверки устойчивости предлагаемого подхода был симулирован шум в определении вершин 2D-сетки, с помощью перспективной камеры с фокусным расстоянием 1500. Симуляции выполнялись на процессоре Core (TM) i5-4200U и 6 ГБ оперативной памяти с использованием Matlab2015a. На показанных ниже рисунках расстояния указаны в метрах, скорость перемещения камеры – в метрах в секунду, а скорость вращения – в радианах в секунду. Ошибки в изображении указаны в пикселях.

### *6.1. Результаты для плоского объекта и линейного геометрического пути*

Рисунок 4 представляет целевой объект в трехмерном пространстве и его проекцию на камеру. Объект состоит из 200 треугольников, как показано на рис. 5. При деформации траектория камеры используется в качестве ссылочной зависимости, чтобы гарантировать, что целевые элементы остаются в пределах и динамически корректируются в соответствии с ожидаемым видом. На рис. 6 управляем движением камеры, которое зависит от веса вдоль траектории. Рисунки 5 и 6 представляют соответственно тепловую карту деформации, перемещающуюся от высокой к низкой. В этом эксперименте выделили постоянные веса. Веса являются самыми высокими с непрерывными

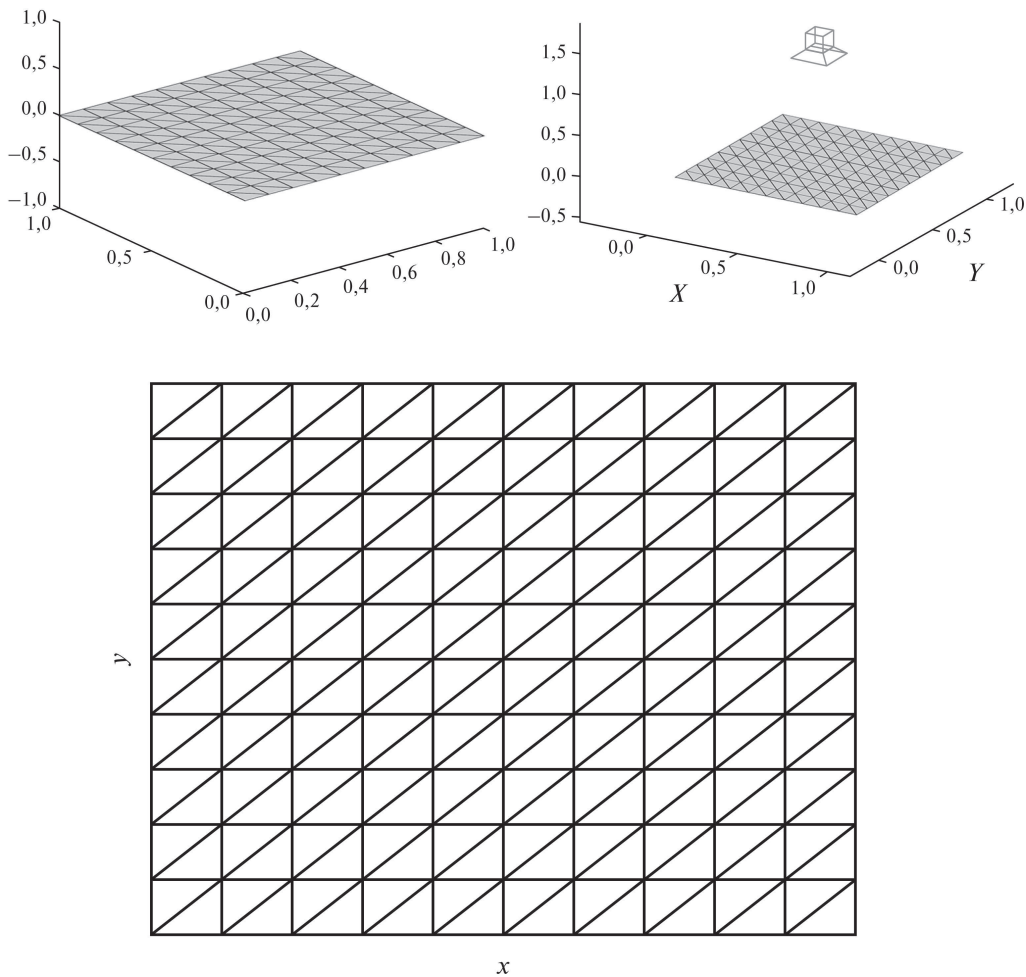


Рис. 4. Справа сверху: опорный объект представляет собой плоскую треугольную 3D-сетку. Слева сверху: эталонный объект и конфигурация камеры в трехмерном пространстве. Внизу: вид плоской сетки в плоскости камеры.

постоянными весами, равными 4. Остальные регионы имеют постоянные веса, равные 1. Не существует верхнего или нижнего предела для выбора веса. Только относительные большие/меньшие значения имеют значение для модуляции большего/меньшего фокуса отслеживания на конкретной области. Области, имеющие значение во время выполнения, имеют большие значения веса для выполнения задачи отслеживания, чтобы лучше следовать за деформированными частями.

### 6.2. Результаты моделирования печени человека

Печень – самый большой орган в организме человека. Он относится к пищеварительной системе и обеспечивает многие жизненно важные функции организма. В данной работе используется сетка печени для проверки эффек-

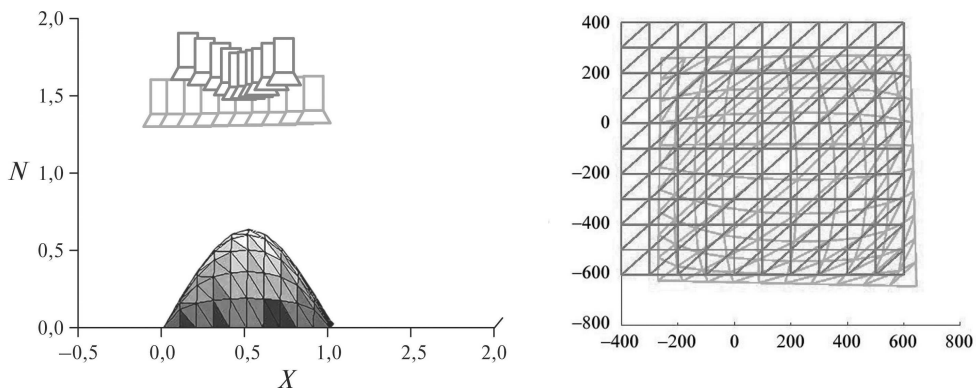


Рис. 5. Слева: деформированный эталонный объект с ориентировочной и деформированной траекториями камеры. Контрольная камера следует линейной запланированной траектории. Светлые камеры – эталонная траектория. Темные камеры – исправленная траектория. Здесь все веса равны единице. Справа: ссылка на просматриваемый объект и деформированный просматриваемый объект. Исправленная траектория должна максимально соответствовать эталонному виду объекта.

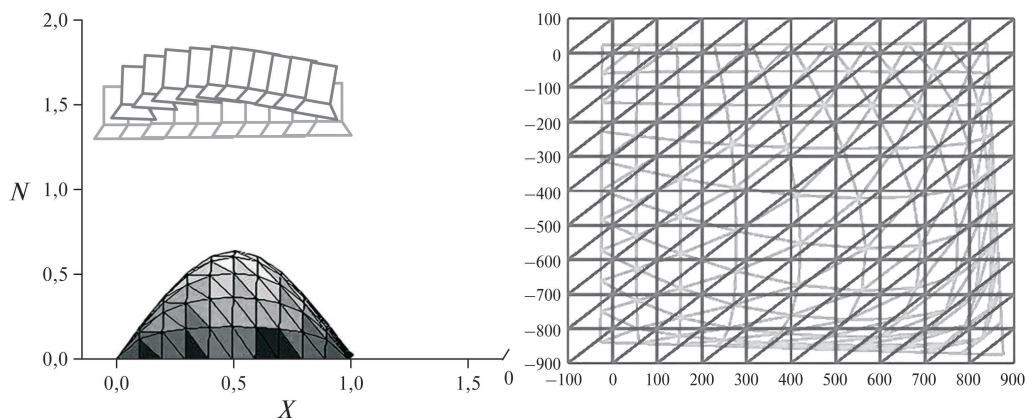


Рис. 6. Слева: деформированный объект 3D-плоскости с камерой, которая следует линейной запланированной траектории. Светлые камеры – эталонная траектория. Темные камеры – исправленная траектория. Здесь все веса равны единице, за исключением весов, связанных с треугольниками на верхнем холме. Они равны 4. Справа: ссылка на просматриваемый объект и деформированный просматриваемый объект. Исправленная траектория должна максимально соответствовать эталонному виду объекта.

тивности используемого метода. Для деформации печени используем гиперэластичную физическую модель Муни–Ривилина и подход, предложенный в [48] для ускорения расчета нелинейных упругих деформаций. Сетка печени содержит 130 382 треугольника и 12 226 вершин (см. рис. 7). Эксперименты проводились по двум типам деформаций: линейной и нелинейной. Для той же сетки печени перемещали выбранную деформированную часть размером 825 на 6 мм по оси  $z$ , что считается линейной деформацией. При второй дефор-

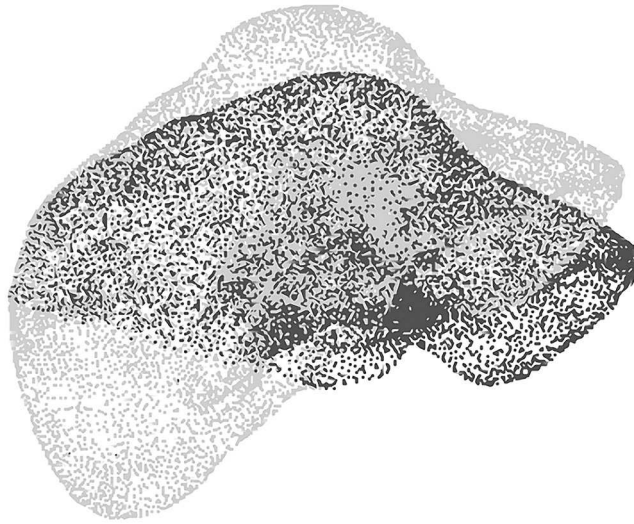
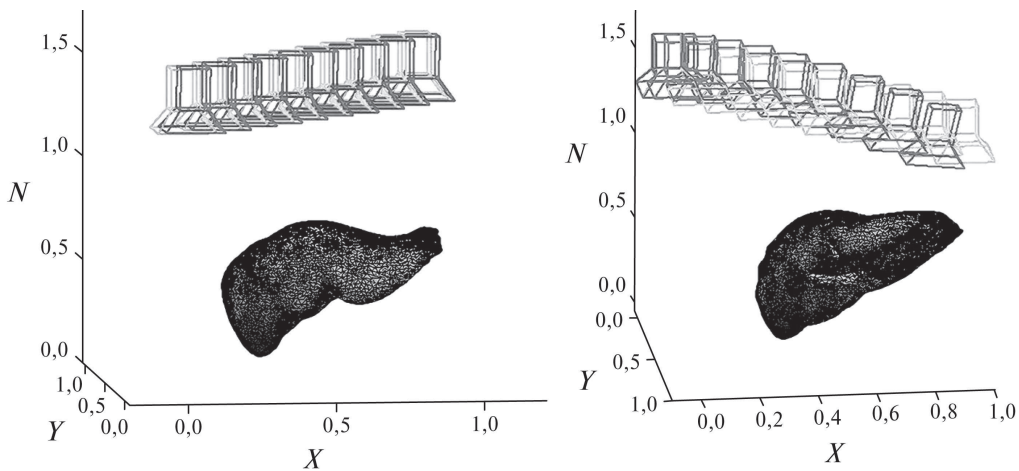


Рис. 7. Темным цветом представлен орган в состоянии покоя. Светлым цветом представлен орган после нелинейной деформации.

мации перемещали те же 825 вершин на 22 мм, что считается нелинейной деформацией.

#### 6.2.1. Результаты с линейной деформацией печени

Для линейной деформации использовали команду для управления движением камеры, которая следовала по ориентировочной горизонтальной прямой линии, как показано на рис. 8. Провели два теста: тест (1), где все веса являются константами и равны 1 для всех треугольников и тест (2), при котором веса изменяются в зависимости от величины видимой деформации. Эта величина вычисляется как отношение площади текущего деформированного треугольника к площади опорного видимого треугольника (см. Приложение). Области вычисляются на видимых треугольниках 2D изображения (опорная и текущая деформированные). Такая стратегия позволяет придавать большее значение деформированным регионам по сравнению с другими областями, менее деформированными или недеформированными. Полученный результат показывает, что камера следила за деформацией печени, не теряя введенной траектории (тест (2)). В тесте (1) траектория камеры изменилась немного и равномерно, так как веса всех треугольников были равны. В тесте (2) камера значительно обновила свою траекторию вокруг деформированной области, сохраняя при этом траекторию, близкую к исходной, далеко от области деформации. Рисунок 9 показывает производительность анализа управления камерой во время динамического отслеживания. Он показывает перемещение и вращение камеры во время отслеживания деформации печени. Скорости вращения  $\omega_y$  и  $\omega_z$  одинаковы для обоих тестов. Суммы



Среднее отклонение 2D-точек

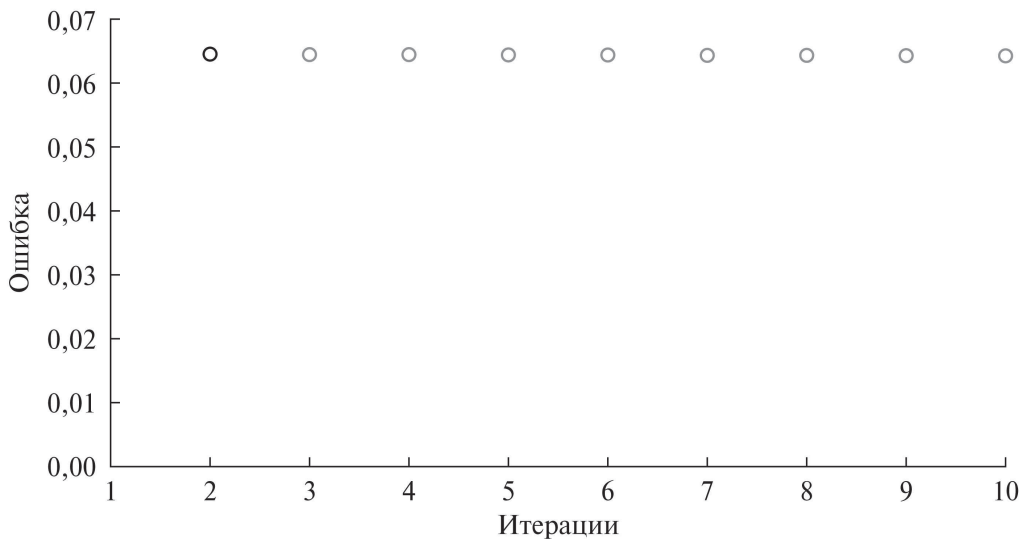


Рис. 8. Печень после линейной упругой деформации и камера следует по ориентировочной прямой траектории. Показаны результаты теста (1). Слева показана эталонная траектория. Справа показана боковая проекция траектории после корректировки. Светлые камеры – эталонная траектория. Темные камеры – исправленная траектория. Внизу показано изменение точек пикселей во время коррекции позы камеры. Темные камеры – эталонная траектория.

перевода по осям  $y$  и  $z$  также почти одинаковы. Заметная разница заключается в переносе и вращении вдоль оси  $x$ , которая соответствует главной оси деформации.

### 6.2.2. Результаты с нелинейной деформацией печени

В этом эксперименте запустим ту же конфигурацию тестовых (1) и тестовых (2) установок, что и раньше. Рассмотрим нелинейную деформацию с максимальным смещением левой доли печени 6 мм, как показано на рис. 7.

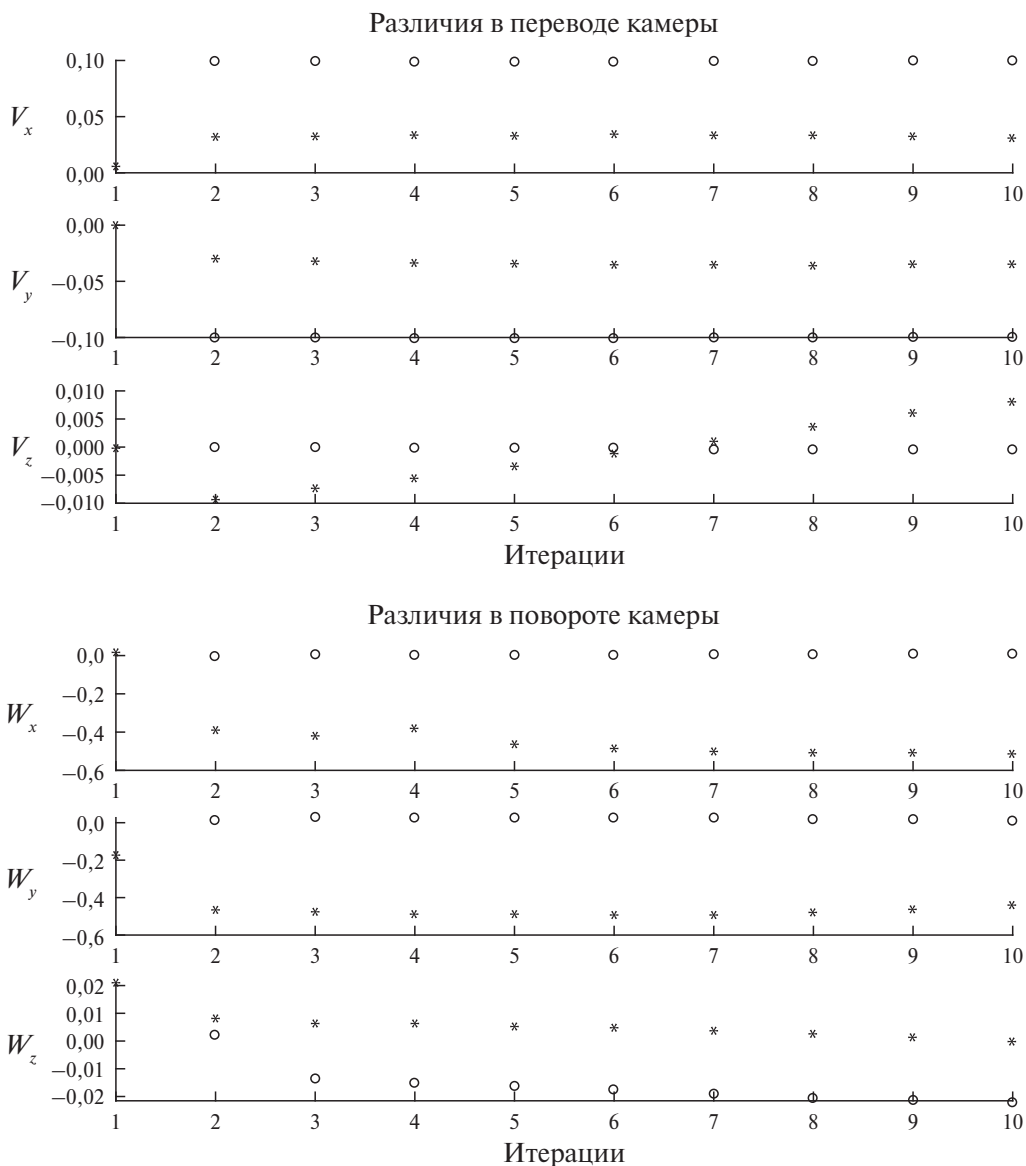


Рис. 9. Анализ производительности скорости камеры при слежении за деформированным объектом с линейной деформацией. Верхняя фигура показывает скорость камеры в переводе. Нижняя фигура показывает скорость камеры при вращении. Круговые точки представляют скорость камеры в соответствии со стратегией тестирования (1). Звездочки обозначают скорость камеры в соответствии со стратегией тестирования (2).  $\omega_y$  и  $\omega_z$  схожи для обоих тестов.

Траектория движения камеры представляет собой прямую горизонтальную линию, обозначенную светлым цветом, а скорректированный вид представлен темным цветом. На рис. 10 слева темным цветом показана скорректированная траектория камеры, которая была получена при установке всех весов на 1.

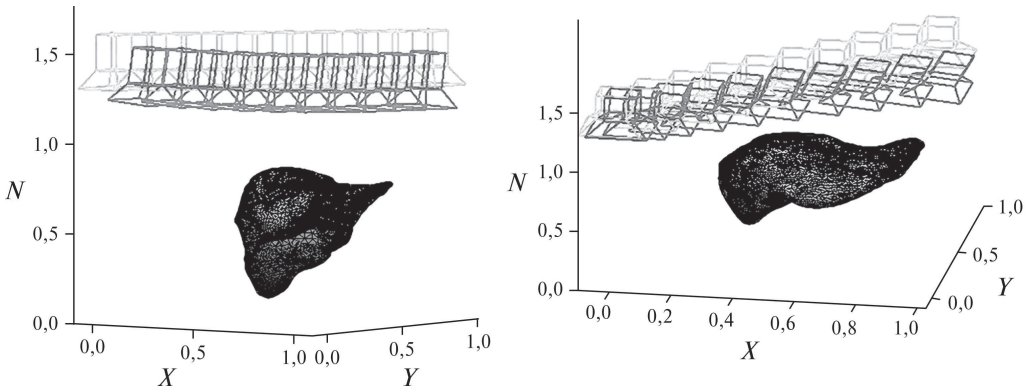


Рис. 10. Печень после нелинейной упругой деформации и камеры следует по ориентировочной прямой траектории. Показаны результаты теста (2). Слева показан вид сбоку. Справа показывает другой вид сбоку. Светлые – эталонная траектория. Темные – исправленная траектория.

На рис. 10 справа темным цветом показана скорректированная траектория движения камеры, полученная с весами, равными 5 для наиболее деформированных областей и равными 1 для наименее деформированных или недеформированных областей. Кривизна скорректированной траектории более важна в случае теста (2) (правый рисунок). Нелинейная деформация треугольников на изображении сохраняется как можно ближе к их областям на эталонном изображении. Весовые функции позволяют брать из печени наиболее релевантные деформированные треугольники и соответствующим образом корректировать объем коррекции. На рис. 10 справа видим, что путь камеры затронут сильнее всего. Это согласуется с нелинейными деформированными треугольниками.

Заметим, что скорость сходимости достаточно высока для подхода (после 10 итераций). Результат расчета коррекции конфигурации камеры показан на рис. 11.

### 6.2.3. Результаты с нелинейной деформацией и криволинейной опорной траекторией

Для нелинейной траектории выполнили тест на криволинейной плоскости опорной траектории со следующими параметрами:  $\theta = (0 : 0.01 : \frac{\pi}{2})$ ,  $c_x = R * \cos(\theta)$ ,  $c_y = R * \cos(\theta)$ ,  $c_z = 1$ . Угол камеры остается постоянным во время этой траектории, указывая вниз на отрицательную ось  $z$ . Эту конфигурацию эталонной камеры использовали в уравнении (22). Также была протестирована стратегия управления с помощью двух тестов, приведенных в разделе 6.2 (тест (1) и тест (2)). Для теста (1) заметим, что камера следовала по траектории, как показано на рис. 12 справа. Для теста (2) сделали тест с той же стратегией управления и криволинейной траекторией, но изменили вес треугольников, где придали важность для треугольников, которые деформируют постоянное значение веса между 1 и 5, как показано на рис. 6.

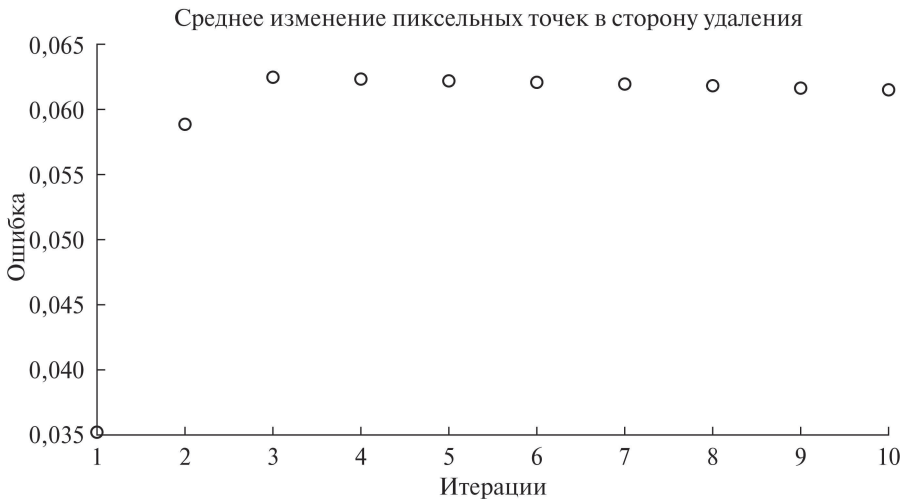


Рис. 11.

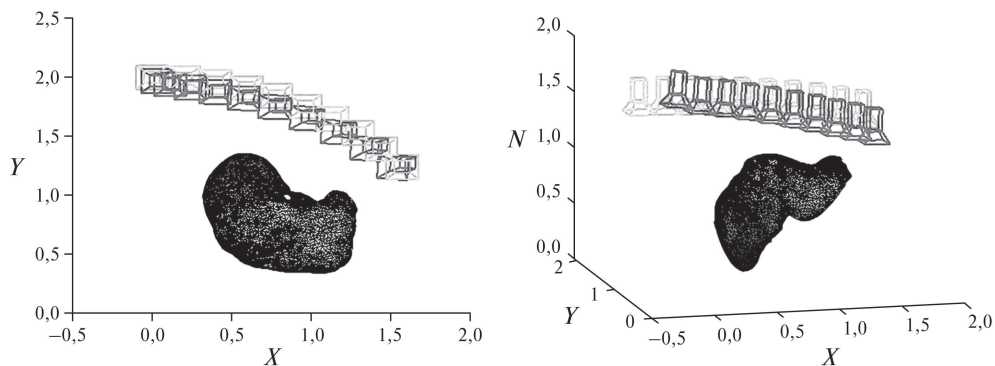


Рис. 12. Печень после нелинейной упругой деформации и камеры следует по опорной криволинейной траектории. Показаны результаты теста (1). Слева показан вид сверху. Справа – вид сбоку. Светлые камеры – эталонная траектория. Темные камеры – исправленная траектория.

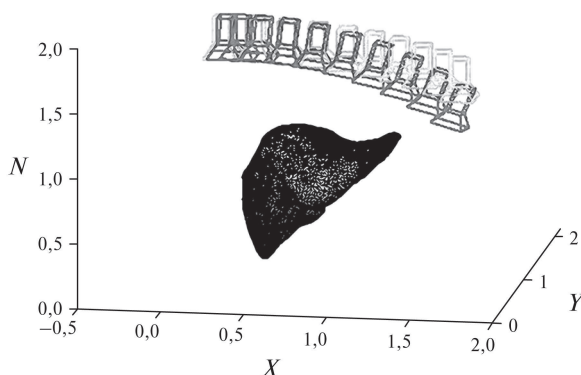


Рис. 13. Печень после нелинейной упругой деформации и камеры следует по опорной криволинейной траектории. Показаны результаты теста (2). Светлые камеры – эталонная траектория. Темные камеры – исправленная траектория.

Полученный результат показывает, что тест (2) лучше теста (1). В тесте (1) камера следовала по траектории, но деформация не была хорошо зафиксирована. Тест 2 успешно прошел по траектории с точным захватом деформации. Кроме того, результат перевода скорости и вращения камеры слежения был лучше в тесте (2), чем в тесте (1), как это показано на рис. 17 (см. ниже). Отметим, что даже в вариации пикселей есть разница, а именно: тест (1) имеет вариацию от 0,06 до 0,1 и тест (2) имеет вариацию от 0 до 0,5.

←

Рис. 11. Анализ производительности скорости камеры при слежении за деформированным объектом с нелинейной деформацией. Верхняя фигура показывает скорость камеры в переводе. Центральная фигура показывает скорость камеры при вращении. Точки представляют скорость камеры в соответствии со стратегией тестирования (1). Звездочки представляют скорость камеры в соответствии со стратегией тестирования (2).

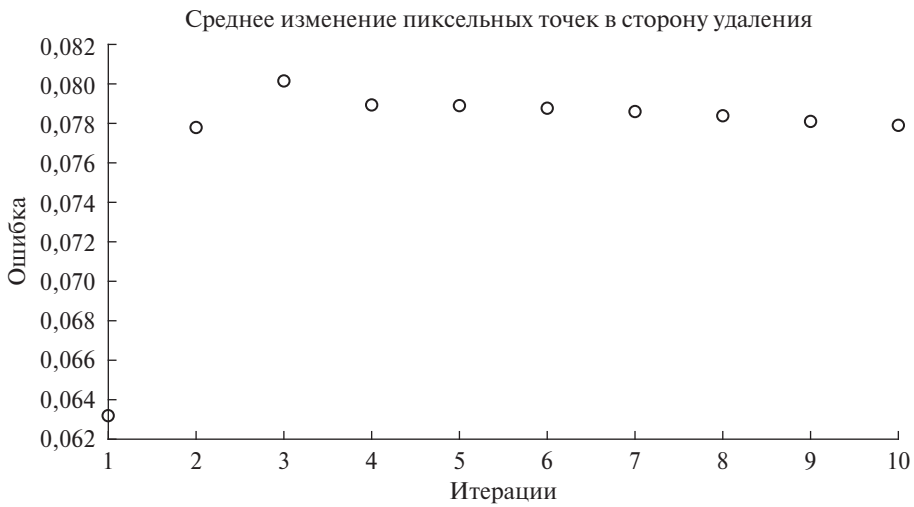
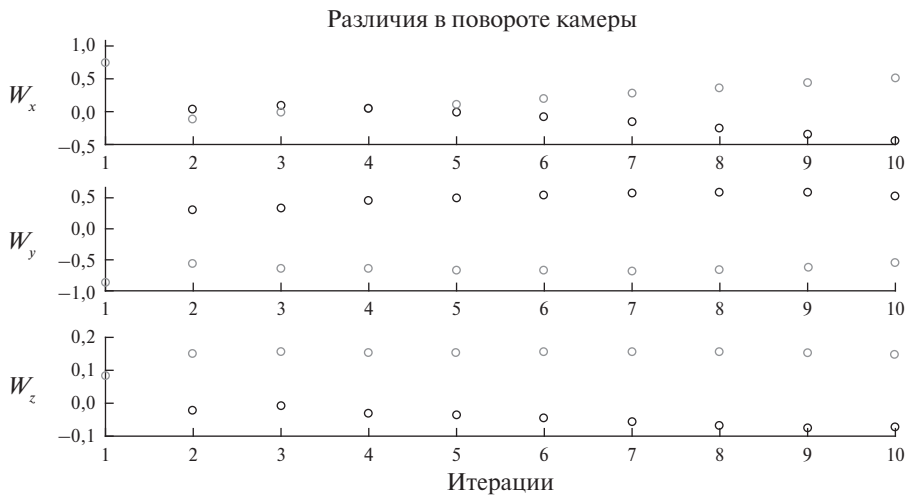
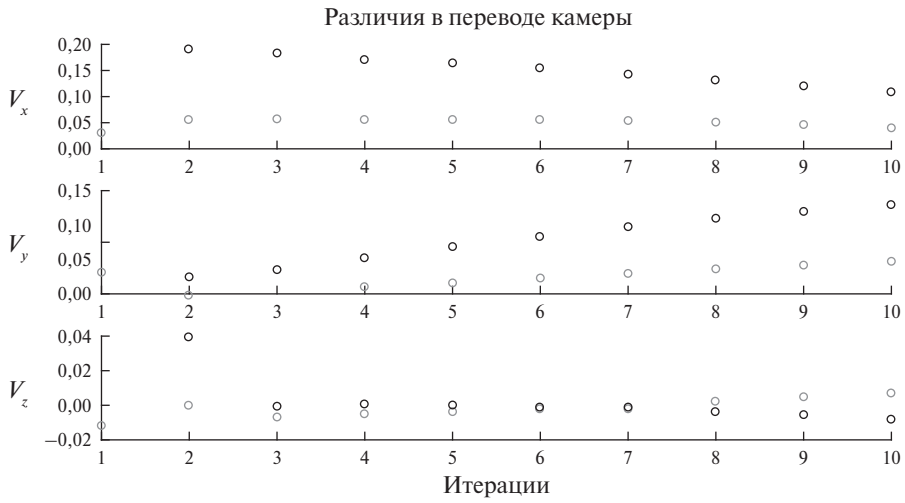


Рис. 14.

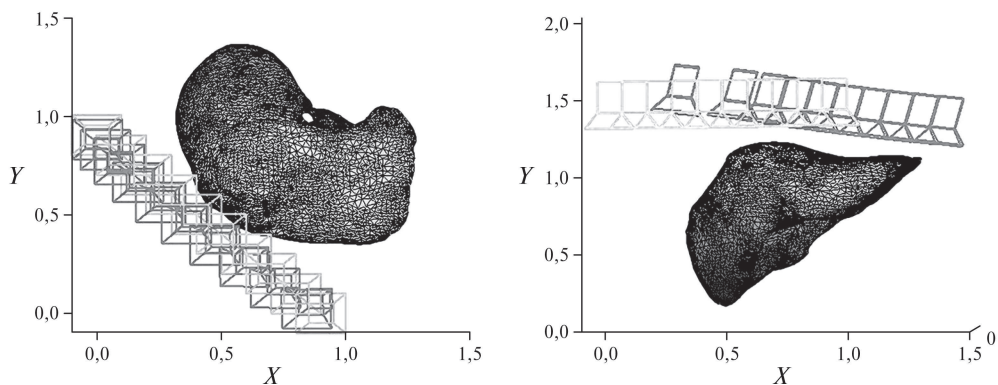


Рис. 15. Печень после нелинейной упругой деформации и камера следует по опорной криволинейной траектории. Показаны результаты теста (1) с шумовыми данными. Слева показан вид сверху. Справа – вид сбоку. Светлые камеры – эталонная траектория. Темные камеры – исправленная траектория.

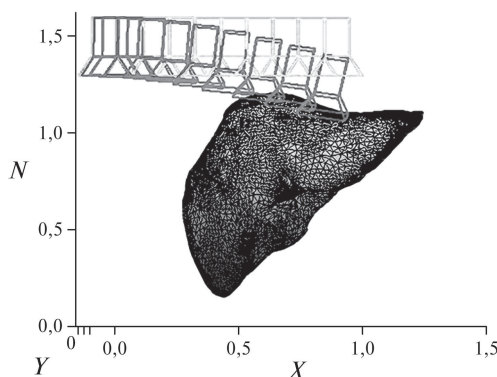


Рис. 16. Печень после нелинейной упругой деформации и камера следует по опорной криволинейной траектории. Показаны результаты теста (2) с шумовыми данными. Светлые камеры – эталонная траектория. Темные камеры – исправленная траектория.

### 6.3. Устойчивость к шуму при обнаружении 2D вершин

Предлагаемый здесь метод направлен на то, чтобы сделать управление движением камеры более надежным. Поэтому в статье попытались имитировать возмущения измерений реального изображения с помощью гауссового случайного шума, добавленного к уравнению (4). Этот шум центрируется со стандартным отклонением 1 пиксель. Он добавляется к координатам изобра-

Рис. 14. Анализ производительности скорости камеры при слежении за деформированным объектом с нелинейной деформацией и по криволинейной траектории. Верхняя фигура показывает скорость камеры в переводе. Центральная фигура показывает скорость камеры при вращении. Темные точки представляют скорость камеры в соответствии со стратегией тестирования (1). Светлые точки представляют скорость камеры в соответствии со стратегией тестирования (2).

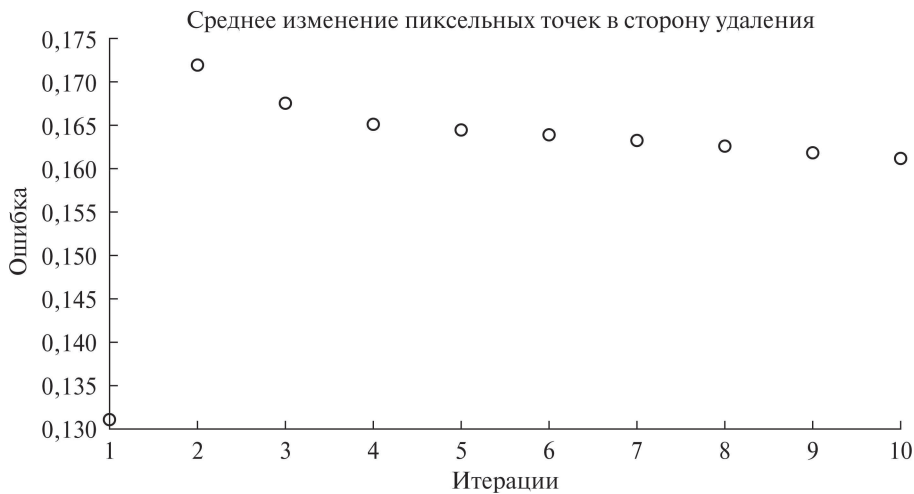
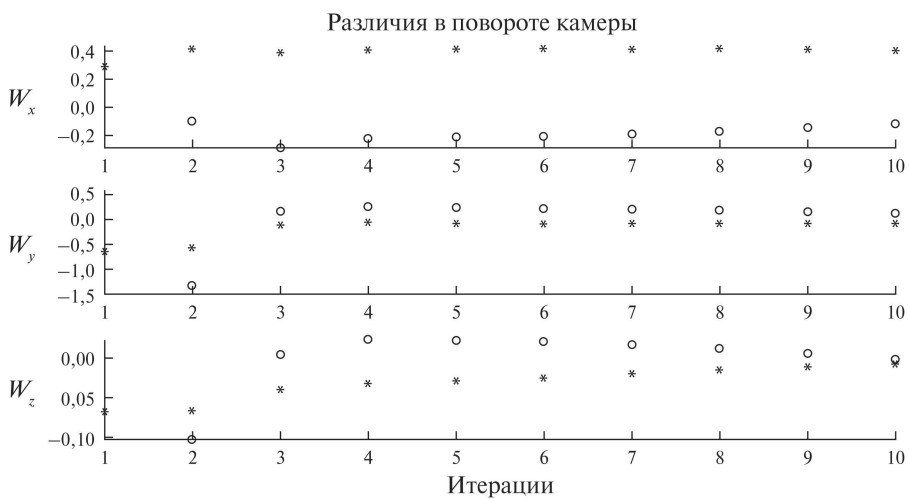


Рис. 17

жения  $im_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Проведен тест на нелинейную деформацию со сравнением экспериментальных установок (как тест (1), так и тест (2)). В результате для теста (1) исправленная траектория была не столь удовлетворительной по сравнению с той же установкой в бесшумовом случае (см. рис. 15). Для теста (2) результат был более совместим с результатом, полученным в бесшумовом случае, как показано на рис. 16. Таким образом, выделение соответствующих весов для соответствующих деформированных регионов не зависит от возмущений при отслеживании и контроле траектории камеры. Рисунок 17 показывает разницу скорости между переносом камеры, поворотом и изменением точки пикселя. Звездочками показаны значения для теста (1), кругами показаны значения для теста (2). Также замечено, что тест (1) переводится и вращается медленнее по сравнению с тестом (2).

#### 6.4. Обсуждения и комментарии

Важность весов четко показана на рис. 5 и 6. С одной стороны, на рис. 6 слева видно, как исходная траектория сильно сгибается, когда она приближается к наиболее деформированной области. Это поведение не наблюдается, когда все веса равны друг другу. С другой стороны, мы видим, как вид деформированной области ближе к эталонному виду на рис. 6 справа по сравнению с рис. 5 справа. Важность структуры и ее надежность можно увидеть в результатах, полученных на рис. 8–17. На этих рисунках подчеркивается надежность предложенного подхода к типу деформации (линейной/нелинейной), типу траекторий (геометрически линейной/нелинейной) и шуму в 2D-обнаружении. Было показано, что в каждом сценарии этих экспериментов предложенный метод позволяет вычислить жесткую коррекцию камеры. Учитывая, что наиболее значимым треугольникам деформируемой области присваиваются большие значения веса, опорная траектория адаптируется в основном к этим областям, независимо от вышеупомянутых категорий.

## 7. Заключение

В данной статье представлен непараметрический подход к визуальной компенсации нежесткой деформации объекта при жестком движении камеры. Эта компенсация обрабатывается, пока камера движется по опорной траектории благодаря непрерывным весовым функциям. Эти веса позволяют сосредоточиться на наиболее значимых деформирующих областях, одновременно стабилизируя изображение в реальном времени в соответствии с эталонным видом. Разработанная в статье стратегия компенсации встраивает

Рис. 17. Анализ производительности скорости камеры при слежении за деформированным объектом с нелинейной деформацией и шумовыми данными. Верхняя часть рисунка показывает скорость камеры в переводе. Центральная часть рисунка показывает скорость камеры при вращении. Точки обозначают скорость камеры в соответствии со стратегией теста (1). Звездочками обозначена скорость камеры в соответствии со стратегией теста (2).

ся в оптимальную систему визуального контроля. Экспериментально доказано, что такой подход устойчив к линейным и нелинейным деформациям, линейным и нелинейным геометрическим траекториям, а также к шуму в 2D-обнаружении. Подчеркиваем, что предлагаемый метод не требует информации о типе объекта, деформации или траектории.

Эта работа позволяет создать прочную формальную основу для перспективного реального применения в контексте лапароскопии. Хирург может спланировать вмешательство с помощью технического специалиста, придавая значительный вес важным областям целевого органа и описывая эталонную геометрическую траекторию для лапароскопа. Во время операции обеспечение движения может быть выполнено роботом, держащим лапароскоп, с использованием изложенного метода. На основе современных подходов к обнаружению 2D-ориентиров в лапароскопии, алгоритм реализуется в реальном времени для обнаружения и построения 2D-сетки с вершинами. Это позволит полностью автоматизировать отслеживание обработанной траектории и визуальное сервоприводное управление.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Вычисление матрицы взаимодействия

Если дана 3D-вершина с координатами  $(X, Y, Z)^T$  в кадре камеры, то ее 2D-проекция на плоскость камеры задается как

$$(П.1) \quad x = X/Z,$$

$$(П.2) \quad y = Y/Z,$$

где  $im = (x, y)^T$  – координата изображения трехмерной точки без учета фокусного расстояния и главной точки (в данной работе рассматриваем калиброванную камеру с известными внутренностями). Производная по времени приведенной выше проекции относительно опорной 3D координаты вершины  $(X_0, Y_0, Z_0)$  будет

$$(П.3) \quad \dot{x} = \dot{X}/Z - \dot{Z}x/Z,$$

$$(П.4) \quad \dot{y} = \dot{Y}/Z - \dot{Z}y/Z.$$

Запишем скорость перемещения камеры как  $v = (v_x, v_y, v_z)^T$ , тогда  $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$  таким образом, чтобы полный вектор скорости камеры записывался как  $\dot{c} = (v^T, \omega^T)^T$ . Формула, связывающая скорость 3D-точки со скоростями камеры, может быть записана по следующей формуле из классической работы [49]:

$$(П.5) \quad \dot{X} = -v_x - \omega_y Z + \omega_z Y,$$

$$(П.6) \quad \dot{Y} = -v_y - \omega_z X + \omega_x Z,$$

$$(П.7) \quad \dot{Z} = -v_z - \omega_x Y + \omega_y X.$$

Заменяем выражения трехмерной скорости уравнений (П.5)–(П.7) выражениями двумерной скорости (П.3)–(П.4)

$$(П.8) \quad \dot{x} = -v_x/Z + xv_z/Z + xy\omega_x - (1 + x^2)\omega_y + y\omega_z,$$

$$(П.9) \quad \dot{y} = -v_y/Z + yv_z/Z + (1 + y^2)\omega_x - xy\omega_y - x\omega_z.$$

Переупорядочив термины и используя обозначение матрицы взаимодействия из уравнения (6), можно переписать указанную выше систему как

$$(П.10) \quad (\dot{x}, \dot{y})^\top = L(x, y, Z)\dot{c}.$$

Если рассмотрим достаточно высокий период выборки  $T$  (по крайней мере 30 кадров в секунду), то вышеприведенную формулу можно дискретизировать следующим образом:

$$(П.11) \quad (x - x_0, y - y_0)^\top / T = L(x, y, Z)(c - c_0) / T,$$

где  $c$  представлен позицией перевода центра камеры и вектором поворота Родригеса

$$(П.12) \quad c = (t_x, t_y, t_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z)^\top.$$

Здесь  $(t_x, t_y, t_z)$  – координаты трехмерной позиции,  $\theta = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2}$  – угол поворота и  $(\theta_x/\theta, \theta_y/\theta, \theta_z/\theta)$  единица измерения оси вращения [50].  $c_0 = (t_x^0, t_y^0, t_z^0, \theta_x^0, \theta_y^0, \theta_z^0)^\top$  является конфигурацией эталонной камеры, близкой к  $c$ . Упрощающее уравнение (П.11) по периоду выборки с обеих сторон дает

$$(П.13) \quad (x - x_0, y - y_0)^\top = L(x, y, Z)(c - c_0).$$

Это отображение известно как матрица взаимодействия, которая связывает близкие вариации скорости камеры с близкими вариациями 2D проецируемых точек. Рассмотрим отображение  $\Pi$ , которое определено в уравнении (3), предполагающем проекцию 3D треугольника как составного геометрического примитива 3 вершин. В уравнении (5) представлено разложение Тейлора первого порядка по формуле (4) о конфигурации эталонной камеры  $c_0$ , близкой к заданной конфигурации камеры  $c$ . Термин  $\frac{\partial \Pi}{\partial c}$  – это матрица взаимодействия, которая связывает вариацию конфигурации камеры с 2D-проекцией 3 вершин, составляющих треугольник. Таким образом, аналитическое выражение  $\frac{\partial \Pi}{\partial c}$  получается путем вертикального сцепления матрицы, приведенной в уравнении (П.10). Таким образом, матрица  $\frac{\partial \Pi}{\partial c}$  состоит из 6 столбцов. В ней 6 строк, так как каждая вершина треугольника дает 2 уравнения, а в каждом треугольнике 3 вершины.

### Пример вычисления веса с видимыми областями треугольников

Не существует оптимального или точного способа вычисления весовых функций [39]. Тем не менее существует множество подходов, которые могут быть использованы для построения функций непрерывного веса. Самое

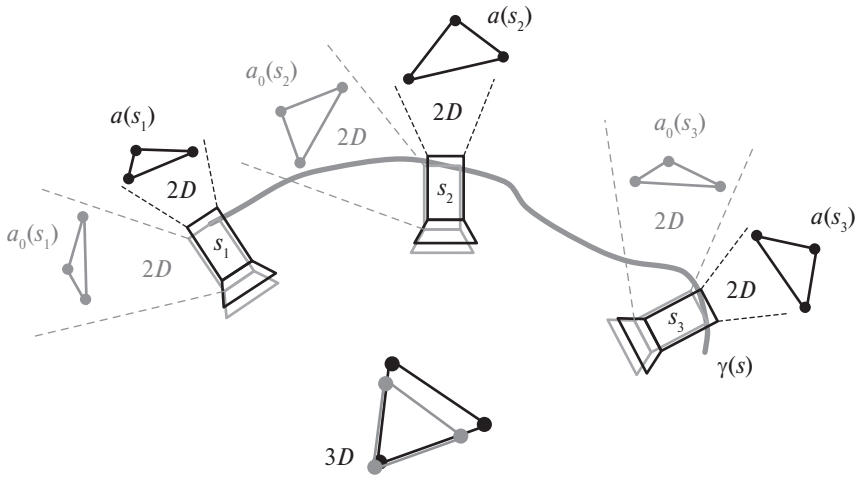


Рис. 18. Пример вычисления веса на основе площади двумерных треугольников.

простое – сделать их постоянными, как это было сделано в протокольном тесте (1) в описанном эксперименте. Другой метод основан на зависимости от степени деформации, что позволяет уделить деформированным участкам большее внимание, чем остальным. В этом случае предположим, что есть один недеформированный 3D треугольник, рассматриваемый камерой по опорной траектории  $\gamma(s)$ . Двухмерная проекция этого треугольника на камеру-образец непрерывна вдоль  $\gamma(s)$ , поскольку это статический объект, который видит непрерывно движущаяся камера (см. рис. 18). На этом рисунке рассматривается эталонная камера в светлом цвете с одним эталонным треугольником в светлом цвете вдоль эталонной траектории  $\gamma(s)$ ,  $0 \leq s \leq 1$ . После деформации новый деформированный треугольник показан в 3D пространстве темным цветом. Исправленная камера по траектории отображается темным цветом. Были взяты три образца траектории  $s_1$ ,  $s_2$  и  $s_3$ , чтобы изобразить три пары видов как эталонного треугольника от камеры наблюдения, так и деформированного треугольника от скорректированной позы камеры. Как видно из плоскостей 2D-изображений обеих камер, площадь рассматриваемых треугольников непрерывно изменяется вдоль траектории. Здесь вес вычисляется как  $w(s) = a_0(s) \text{abs}(a_0(s) - a(s)) / (1 + a_0(s))$ . Двухмерное расположение спроецированного треугольника может быть записано как

$$(П.14) \quad im_0(s) = (x_1^0(s), x_2^0(s), x_3^0(s), y_1^0(s), y_2^0(s), y_3^0(s))^T.$$

Площадь спроецированного треугольника вдоль  $\gamma(s)$  также непрерывна и может быть вычислена как каждый  $s$  как

$$(П.15) \quad a_0(s) = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1^0(s) & y_1^0(s) & 1 \\ x_2^0(s) & y_2^0(s) & 1 \\ x_3^0(s) & y_3^0(s) & 1 \end{pmatrix},$$

где  $\det()$  обозначает определитель квадратичных матриц. Если рассмотрим  $a(s)$  как площадь проецируемого треугольника на камеру во время выполнения, то формула вычисления весовой функции может быть вычислена как

$$(П.16) \quad w(s) = a_0(s) \frac{\text{abs}(a_0(s) - a(s))}{(1 + a_0(s))},$$

где  $\text{abs}()$  обозначает абсолютное значение вещественных чисел. Вышеуказанный  $w(s)$  является непрерывным и состоит из непрерывных функций ( $a(s)$  и  $a_0(s)$ ). Он положителен на каждые  $s$  для  $0 \leq s \leq 1$ . Если треугольник не виден в ссылочном представлении, его область  $a_0(s)$  равна NULL, что делает его вес также нулевым. Чем больше треугольник деформирован, тем больше  $\text{abs}(a_0(s) - a(s))$ , что позволяет учитывать больше деформированных областей.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Petit A., Lippiello V., Fontanelli G.A., Siciliano B.* Tracking elastic deformable objects with an RGB-d sensor for a pizza chef robot // *Robotics and Autonomous Systems*. 2017. V. 88. P. 187–201. <https://doi.org/10.1016/j.robot.2016.08.023>. Accessed 2021-06-17.
2. *Haouchine N., Dequidt J., Peterlik I., Kerrien E., Berger M.-O., Cotin S.* Image-guided simulation of heterogeneous tissue deformation for augmented reality during hepatic surgery // *2013 IEEE International Symposium on Mixed and Augmented Reality (ISMAR)*, P. 199–208. <https://doi.org/10.1109/ISMAR.2013.6671780>
3. *Rastegarpanah A., Aflakian A., Stolkin R.* Optimized hybrid decoupled visual servoing with supervised learning / *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I // J. Syst. Control Engin.* 2022. V. 236(2). P. 338–354. <https://doi.org/10.1177/09596518211028379>. Publisher: IMECHE. Accessed 2021-07-21.
4. *Chi C., Berenson D.* Occlusion-robust deformable object tracking without physics simulation // *2019 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. 2019. P. 6443–6450. <https://arxiv.org/abs/2101.007332101.00733>. <https://doi.org/10.1109/IROS40897.2019.8967827>. Accessed 2021-06-29.
5. *Lagneau R.* Shape Control of Deformable Objects by Adaptive Visual Servoing // *INSA de Rennes*, 2020. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03087518> Accessed 2021-06-17.
6. *Lagneau R., Krupa A., Marchal M.* Active Deformation through Visual Servoing of Soft Objects // *2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, P. 8978–8984 (2020). <https://doi.org/10.1109/ICRA40945.2020.9197506>. ISSN: 2577-087X
7. *Chaumette F. Ikeuchi K.* (ed.) *Visual Servoing*. Springer. Boston. 2014. P. 869–874.
8. *Tahri O., Chaumette F.* Image moments: generic descriptors for decoupled image-based visual servo // *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2004. *Proceedings. ICRA '04*. 2004. V. 2. P. 1185–11902. <https://doi.org/10.1109/ROBOT.2004.1307985> ISSN: 1050-4729

9. *Agravante D.J., Claudio G., Spindler F., Chaumette F.* Visual servoing in an optimization framework for the whole-body control of humanoid robots // *IEEE Robotics and Automation Letters*. V. 2. No. 2. P. 608–615.  
<https://doi.org/10.1109/LRA.2016.2645512>
10. *Ren X., Li H., Li Y.* Image-based visual servoing control of robot manipulators using hybrid algorithm with feature constraints // *IEEE Access* 8. 2020. P. 223495–223508. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3042207>
11. *Wang T., Wang W., Wei F.* An overview of control strategy and trajectory planning of visual servoing / Fei, M., Li, K., Yang, Z., Niu, Q., Li, X. (eds.) *Recent Featured Applications of Artificial Intelligence Methods // LSMS 2020 and ICSEE 2020 Workshops*. P. 358–370. Springer, Singapore 2020
12. *Corke P., Hutchinson S.* A new partitioned approach to image-based visual servo control // *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. V. 17. No. 4. P. 507–515.  
<https://doi.org/10.1109/70.954764>
13. *Nicholas R. Gans, Seth A.* Performance Tests for Visual Servo Control Systems, with Application to Partitioned Approaches to Visual Servo Control Hutchinson, Peter I. Corke // *Int. J. Robot. Res.* 2003.  
<https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/027836490302210011> Accessed 2021-03-07
14. *Janabi-Sharifi F., Wilson W.J.* Automatic selection of image features for visual servoing // *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 1997. V. 13. No. 6. P. 890–903. <https://doi.org/10.1109/70.650168>
15. *Chaumette F.* Image moments: a general and useful set of features for visual servoing // *IEEE Transactions on Robotics*. 2024. V. 20. No. 4. P. 713–723.  
<https://doi.org/10.1109/TRO.2004.829463>
16. *Molnar C., Nagy T.D., Elek R.N., Haidegger T.* Visual servoing-based camera control for the da vinci surgical system // *2020 IEEE 18th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics (SISY)*. 2020. P. 107–112.  
<https://doi.org/10.1109/SISY50555.2020.9217086>
17. *Mohamed I.* MPPI-VS: Sampling-Based Model Predictive Control Strategy for Constrained Image-Based and Position-Based Visual Servoing // *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. 2021.  
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2104.04925>
18. *Lagneau R., Krupa A., Marchal M.* Active deformation through visual servoing of soft objects // *2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. 2020. P. 8978–8984. <https://doi.org/10.1109/ICRA40945.2020.9197506>
19. *Hu Z., Han T., Sun P., Pan J., Manocha D.* 3-d deformable object manipulation using deep neural networks // *IEEE Robotics and Automation Letters*. 2019. V. 4. No. 4. P. 4255–4261. <https://doi.org/10.1109/LRA.2019.2930476>
20. *Jia B., Hu Z., Pan J., Manocha D.* Manipulating highly deformable materials using a visual feedback dictionary // *2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. 2018. P. 239–246.  
<https://doi.org/10.1109/ICRA.2018.8461264>

21. *Hu Z., Sun P., Pan J.* Three-dimensional deformable object manipulation using fast online gaussian process regression // *IEEE Robotics and Automation Letters*. 2018. V. 3. No. 2. P. 979–986. <https://doi.org/10.1109/LRA.2018.2793339>
22. *Zhu J.* Vision-based robotic manipulation of deformable linear objects. PhD thesis, Université Montpellier. 2020.
23. *Chen Z., Li S., Zhang N., Hao Y., Zhang X.* Eye-to-hand robotic visual tracking based on template matching on fpgas // *IEEE Access*. 2019. V. 7. P. 88870–88880. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2926807>
24. *Staneva V., Younes L.* Modeling and estimation of shape deformation for topology-preserving object tracking // *SIAM J. Imag. Sci.*. 2014. V. 7. No. 1. P. 427–455. <https://doi.org/10.1137/130919714>
25. *Hu Y., Carter T.J., Ahmed H.U., Emberton M., Allen C., Hawkes D.J., Barratt D.C.* Modelling prostate motion for data fusion during image-guided interventions // *IEEE Transactions on Medical Imaging*. V. 30. No. 11. P. 1887–1900. <https://doi.org/10.1109/TMI.2011.2158235>
26. *Chen Q., Sun Q.-S., Heng P.A., Xia D.-S.* Two-stage object tracking method based on kernel and active contour // *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*. 2020. V. 20. No. 4. P. 605–609. <https://doi.org/10.1109/TCSVT.2010.2041819>
27. *Cao X., Lan J., Rong Li X.* Extension-deformation approach to extended object tracking // 2016 19th International Conference on Information Fusion. (FUSION). 2016. P. 1185–1192.
28. *Joo H., Simon T., Sheikh Y.* Total capture: A 3d deformation model for tracking faces, hands, and bodies // *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2018.
29. *Royer L., Marchal M., Le Bras A., Dardenne G., Krupa A.* Real-time tracking of deformable target in 3d ultrasound images // 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). P. 2430–2435. <https://doi.org/10.1109/ICRA.2015.7139523>. ISSN: 1050-4729.
30. *Royer L., Krupa A., Dardenne G., Bras A.L., Marchand E., Marchal M.* Real-time target tracking of soft tissues in 3d ultrasound images based on robust visual information and mechanical simulation // *Medical Image Analysis*. 2017. V. 35. P. 582–598. ISSN 1361-8415. <https://doi.org/10.1016/j.media.2016.09.004>
31. *Kajihara K., Huang S., Bergstrom N., Yamakawa Y., Ishikawa M.* Tracking of trajectory with dynamic deformation based on dynamic compensation concept // 2017 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO). 2017. P. 1979–1984. <https://doi.org/10.1109/ROBIO.2017.8324709>
32. *Zhou H., Ma J., Tan C.C., Zhang Y., Ling H.* Cross-weather image alignment via latent generative model with intensity consistency // *IEEE Transactions on Image Processing*. 2020. V. 29. P. 5216–5228. <https://doi.org/10.1109/TIP.2020.2980210>
33. *Toriya H., Dewan A., Kitahara I.* Sar2opt: Image alignment between multi-modal images using generative adversarial networks // *IGARSS 2019 - 2019 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*. 2019. P. 923–926. <https://doi.org/10.1109/IGARSS.2019.8898605>

34. *Shingo Kagami, K.H. Kotaro Omi*: Alignment of a flexible sheet object with position-based and image-based visual servoing // *Advanced Robotics*. 2016. V. 30. P. 965–978. <https://doi.org/10.1080/01691864.2016.1183518>
35. *Xi Shen, A.A.E.M.A. Francois Darmon*. Ransac-flow: Generic two-stage image alignment // *Computer Vision-ECCV 2020*. V. 12349. P. 618–637.
36. *Dong Y., Liang T., Zhang Y., Du B*. Spectral spatial weighted kernel manifold embedded distribution alignment for remote sensing image classification // *IEEE Transactions on Cybernetics*. (2021). V. 51(6). P. 3185–3197. <https://doi.org/10.1109/TCYB.2020.3004263>
37. *Mathiassen K., Glette K., Elle O.J*. Visual servoing of a medical ultrasound probe for needle insertion // *2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. P. 3426–3433. <https://doi.org/10.1109/ICRA.2016.7487520>
38. *Mura M., Abu-Kheil Y., Ciuti G., Visentini-Scarzanella M., Menciacsi A., Dario P., Dias J., Seneviratne L*. Vision-based haptic feedback for capsule endoscopy navigation: a proof of concept // *Micro-Bio Robot*. V. 11. P. 35–45. <https://doi.org/10.1007/s12213-016-0090-2> Accessed 2021-03-23.
39. *Malti A., Taïx M., Lamiraux F*. A general framework for planning landmark-based motions for mobile robots // *Advanced Robotics*. 2011. V. 25. No. (11–12). P. 1427–1450. <https://doi.org/10.1163/016918611X579457>
40. *Sengupta A., Krupa A., Marchand E*. Visual Tracking of Deforming Objects Using Physics-based Models // *ICRA 2021 – IEEE International Conference on Robotics and Automation 2021*.
41. *Feng X., Mei W., Hu D*. A Review of Visual Tracking with Deep Learning // *Atlantis Press*. (2016). P. 231–234. ISSN: 1951-6851.
42. *Marvasti-Zadeh S.M., Cheng L., Ghanei-Yakhdan H., Kasaei S*. Deep Learning for Visual Tracking: A Comprehensive Survey // *IEEE Transact. Intelligent Transport*. V. 23. No. 5. 2021. P. 1–26.
43. *Malti A., Hartley R., Bartoli A., Kim J.-H*. Monocular template-based 3d reconstruction of extensible surfaces with local linear elasticity // *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2013.
44. *Malti A., Bartoli A., Hartley R*. A linear least-squares solution to elastic shape-from-template // *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2015.
45. *Malti A., Herzet C*. Elastic shape-from-template with spatially sparse deforming forces // *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2017.
46. *Casillas-Perez D., Pizarro D., Fuentes-Jimenez D., Mazo M., Bartoli A*. Equiareal Shape-from-Template // *J. Math. Imaging Vision*. 2019. V. 61. No. 5. P. 607–626.
47. *Ben-Israel A., Greville T.N.E*. *Generalized Inverses Theory and Applications* // Springer. 2003. Google-Books-ID: o\_zXUXaqGU8C
48. *Saidi F., Malti A*. Fast and accurate nonlinear hyper-elastic deformation with a posteriori numerical verification of the convergence of solution: Application to the simulation of liver deformation // *Numerical Methods in Biomedical Engineering*. 2021. V. 37. No. 5. <https://doi.org/10.1002/cnm.3444>

49. *Chaumette F., Hutchinson S.* Visual servo control. I. basic approaches // IEEE Robot. Autom. Magaz. 2006 V. 13. No. 4. P. 82–90.  
<https://doi.org/10.1109/MRA.2006.250573>
50. *Murray R.M., Li Z., Sastry S.S., Sastry S.S.* A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation // CRC Press. 1994. <https://doi.org/10.1201/9781315136370>

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.В. Виноградовым.*

Поступила в редакцию 13.02.2024

После доработки 26.08.2024

Принята к публикации 26.09.2024

---

---

## СОДЕРЖАНИЕ

### Нелинейные системы

- Коган М.М., Степанов А.В.** Оптимальная абсолютная стабилизация неизвестных систем Лурье на основе экспериментальных и априорных данных. . . . . 3
- Куковеров М.В.** К вычислению размера границы области устойчивости по Шуру . . . . . 21

### Стохастические системы

- Шайкин М.Е.** Задачи  $H^2/H_\infty$ -теории регуляторов для линейных стохастических объектов мультипликативного типа . . . . . 47

### Управление в технических системах

- Верба В.С., Меркулов В.И., Ильчук А.Р.** Подходы к оптимизации методов наведения на высокоскоростные интенсивно маневрирующие цели. Ч. 3. . . . . 71
- Деррар Я., Саиди Ф. Мальти А.** Визуальное сервоуправление для деформируемых объектов с использованием геометрических примитивов и заранее спланированных траекторий . . . . . 86

## CONTENTS

### Nonlinear Systems

- Kogan M.M., Stepanov A.V.** Optimal Absolute Stabilization of Unknown Lurie Systems Based on Experimental Data and A Priori Information . . . . . 3
- Kukoverov M.V.** Towards Computation of Surface Area of Schur Stability Domain . . 21

### Stochastic Systems

- Shaykin M.Ye.** To the  $H^2/H_\infty$ -Theory of Regulators for Linear Stochastic Multiplicative Type Objects . . . . . 47

### Control in Technical Systems

- Verba V.S., Merkulov V.I., Ilchuk A.R.** Approaches to Optimization of Guidance Methods for High-Speed Intensely Maneuvering Targets. Part 3. Optimization of Guidance Based on the Dynamic Properties of Interceptors . . . . . 71
- Yasser Derrar, Farah Saidi, Abed Malti.** Visual Servoing for Deformable Objects with Pre-Planned Trajectory-Guided Geometric Primitives . . . . . 86